

## Sommaire

<b>10. Contraintes normales .....</b>	<b>2</b>
<b>11. Calcul d'une flèche (Hors programme).....</b>	<b>14</b>
<b>12. Noyau central .....</b>	<b>24</b>
<b>13. Etude de l'effort tranchant dans les sections massives .....</b>	<b>37</b>
<b>14. Etude de l'effort tranchant dans les sections minces symétriques .....</b>	<b>45</b>
<b>15. Etude de la torsion.....</b>	<b>49</b>
<b>16. Principe de la précontrainte .....</b>	<b>54</b>

## 10. Contraintes normales

### 10.1 Etude des contraintes normales

#### 10.1.1 Rappel sur les hypothèses sur les déformations

##### Enoncé du principe de NAVIER BERNOULLI

« Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne ».

##### Conséquences

La déformation est sous la forme d'un plan donc :  $\varepsilon_x = A + By + Cz$

### 10.2 Calculs analytiques

#### 10.2.1 Expression

$$\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z$$

##### Résultat

$\sigma$  : contrainte normale [Pa]

##### Données obtenues à partir des diagrammes de sollicitations :

N : Effort normal [N]

$M_z$  : moment fléchissant autour de  $\vec{z}$  [MN.m]

$M_y$  : moment fléchissant autour de  $\vec{y}$  [MN.m]

##### Caractéristiques géométriques de la section :

S : Surface [m<sup>2</sup>]

$I_z$  : moment d'inertie selon  $\vec{z}$  [m<sup>4</sup>]

$I_y$  : moment d'inertie selon  $\vec{y}$  [m<sup>4</sup>]

##### Coordonnées du point pour lequel on calcule la valeur de la contrainte à l'intérieur de la section :

y [m]

z [m]

### 10.2.2 Convention de signe

**ATTENTION** : la convention de signe est différente entre l'effort normal  $N$  du diagramme de sollicitation et la contrainte normale  $\sigma$  pour la traction ou la compression.

<u>Effort normal</u> ( $N$ en [N])	$N > 0$ : compression supplémentaire Nota : ça ne signifie pas que la section est complètement comprimée ! Puisque le moment fléchissant apporte de la traction et de la compression (selon la position du point pour lequel on calcule les contraintes). $N < 0$ : traction supplémentaire
<u>Contrainte normale</u> ( $\sigma$ en [Pa])	$\sigma > 0$ : point où il y a de la traction $\sigma < 0$ : point où il y a de la compression $\sigma = 0$ : point sans contrainte normale (ni tendu, ni comprimé) – définition de l'axe neutre

## 10.3 Différents types de sollicitations

### 10.3.1 Traction et compression simple

#### Définition d'une traction ou compression simple

Une section droite est sollicitée en traction simple (resp. compression simple) si et seulement si les sollicitations se résument à un effort normal  $N < 0$  (resp.  $N > 0$ ) au niveau du centre de gravité de la section.

C'est-à-dire que :

$$M_z = M_y = T_y = T_z = M_t = 0$$

Et  $N \neq 0$

#### Définition d'une flexion simple

Une section droite est sollicitée en flexion simple si et seulement si un unique moment fléchissant est non nul et que l'effort normal est nul.

C'est-à-dire que :

$M_z$  ou  $M_y$  non nul

Et  $N = 0$

#### Définition d'une flexion composée

Une section droite est sollicitée en flexion composée si et seulement si un unique moment fléchissant est non nul et que l'effort normal est non nul.

C'est-à-dire que :

$M_z$  ou  $M_y$  non nul

Et  $N \neq 0$

### Définition d'une flexion déviée

Une section droite est sollicitée en flexion déviée si et seulement si deux moments fléchissant sont non nuls.

- Lorsque l'effort normal est nul, la flexion est dite déviée
- Lorsque l'effort normal est non nul, la flexion est dite déviée composée

C'est-à-dire que :

$M_z$  et  $M_y$  non nul

Et

$N = 0$  pour une flexion déviée

Ou

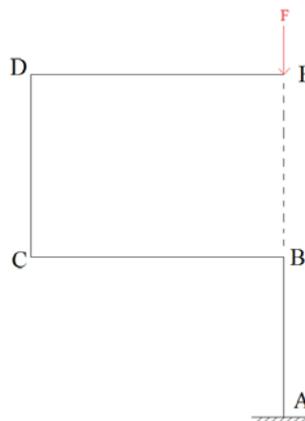
$N \neq 0$  pour une flexion déviée composée

Le tableau suivant résume les définitions précédentes :

Type de sollicitation	N	$M_y$	$M_z$
Traction (si $N < 0$ ) ou compression pure (si $N > 0$ )	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
Flexion simple autour de l'axe z	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion simple autour de l'axe y	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion composée autour de l'axe z	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion composée autour de l'axe y	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion déviée	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Flexion déviée composée	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

### Exemple

Donner les différents types de sollicitations sur chacun des tronçons suivants :



### Réponse

Tronçon AB :  $\begin{cases} N \neq 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \rightarrow$  compression simple si  $F > 0$  (ou traction simple si  $F < 0$ )

Tronçons BC et DE :  $\begin{cases} N = 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases} \rightarrow$  flexion simple

Tronçon CD :  $\begin{cases} N \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases} \rightarrow$  flexion composée

## 10.4 Axe neutre

### 10.4.1 Définitions

#### Définition de l'axe neutre

Axe neutre : ensemble des points dont la contrainte normale est nulle

### 10.4.2 Déterminer la position de l'axe neutre

#### Propriété

L'axe neutre est la droite d'équation

$$\sigma(y, z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0 .$$

Nota : Il est la frontière entre la zone comprimée et zone tendue :

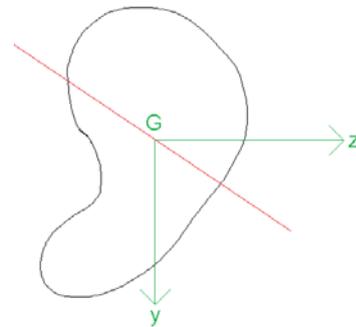
- Lorsque l'A.N. coupe la section : la section est partiellement comprimée
- Lorsque l'A.N. ne coupe pas la section :
  - o La section est entièrement comprimée si  $N > 0$
  - o La section est entièrement tendue si  $N < 0$

10.4.2.1 *Position de l'axe neutre*

Influence de l'effort normal (PRINCIPE 1) :

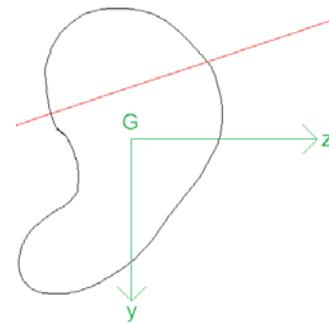
L'axe neutre passe par le centre de gravité G de la section si  $N = 0$ .

Exemple



L'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité G de la section si  $N \neq 0$ .

Exemple



Influence des moments fléchissants (PRINCIPE 2) :

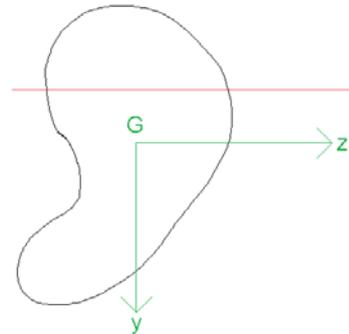
L'axe neutre est parallèle à l'axe  $\vec{z}$  lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y = 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe  $\vec{z}$ )

Exemple



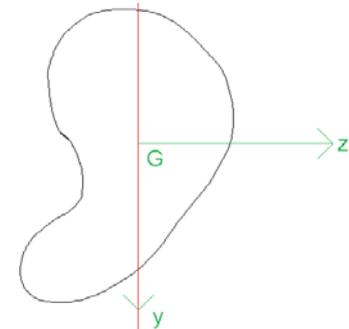
L'axe neutre est parallèle à l'axe  $\vec{y}$  lorsque :

$$M_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe  $\vec{y}$ )

Exemple



L'axe neutre n'est parallèle, ni à l'axe  $\vec{z}$ , ni à l'axe  $\vec{y}$  lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion déviée simple ou déviée composée)

Exemple

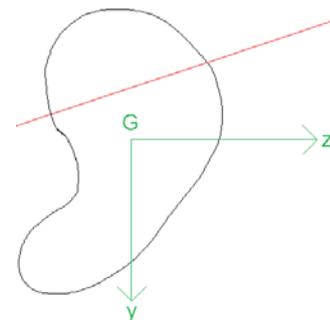
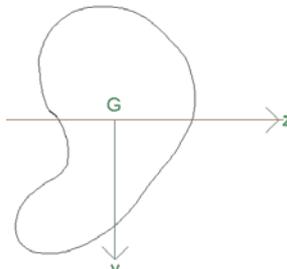
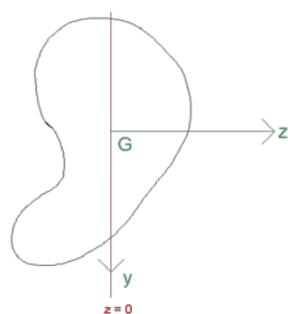
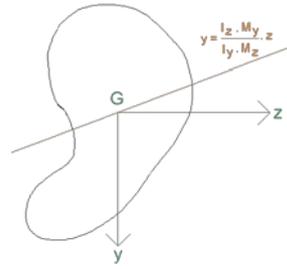
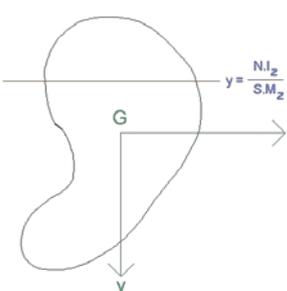
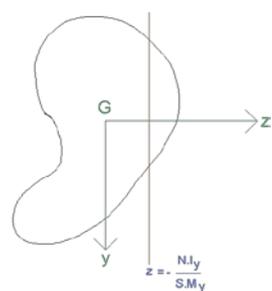
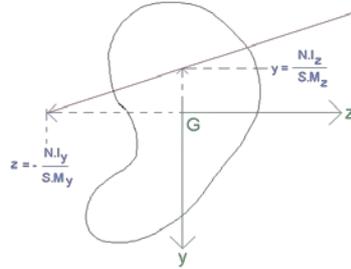
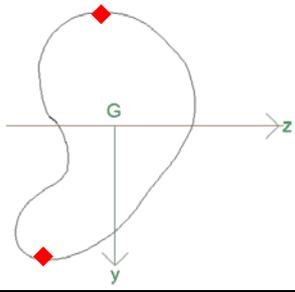
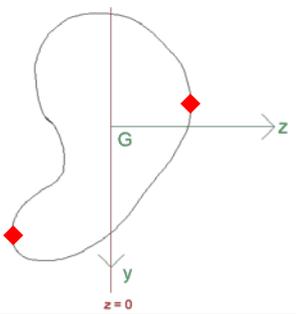
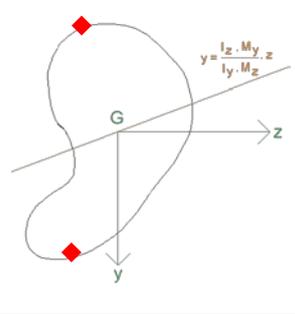
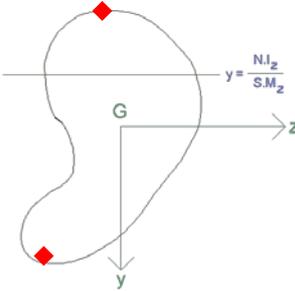
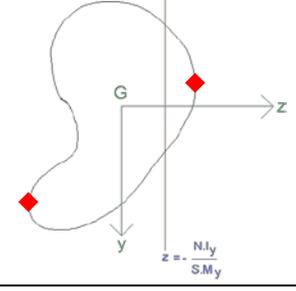
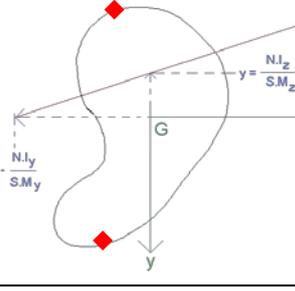


Tableau récapitulatif des 2 principes et de l'équation de l'axe neutre :

		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = 0$ 
	$M_y \neq 0$	L'axe neutre est la droite d'équation : $z = 0$ 	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = \frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z} z$ 
$N \neq 0$	$M_y = 0$	Il n'existe pas d'axe neutre. La section est - soit entièrement tendue (si $N < 0$ ) - soit entièrement comprimée (si $N > 0$ )	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = \frac{N \cdot I_z}{S \cdot M_z}$ 
	$M_y \neq 0$	L'axe neutre est la droite d'équation : $z = -\frac{N \cdot I_y}{S \cdot M_y}$ 	L'axe neutre est la droite passant par les points $\begin{pmatrix} \frac{N I_z}{S M_z} \\ 0 \end{pmatrix}_{G; \vec{y}; \vec{z}}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{N I_y}{S M_y} \end{pmatrix}_{G; \vec{y}; \vec{z}}$ 

### 10.4.3 Position des points les plus sollicités (pour lesquels il convient de calculer les contraintes)

Les points les plus sollicités sont les points de la section les plus éloignés de l'axe neutre. Il convient donc de calculer les contraintes en ces points : ♦

		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	
	$M_y \neq 0$		
$N \neq 0$	$M_y = 0$	Il n'existe pas d'axe neutre. La section est - soit entièrement tendue (si $N < 0$ ) - soit entièrement comprimée (si $N > 0$ )	
	$M_y \neq 0$		

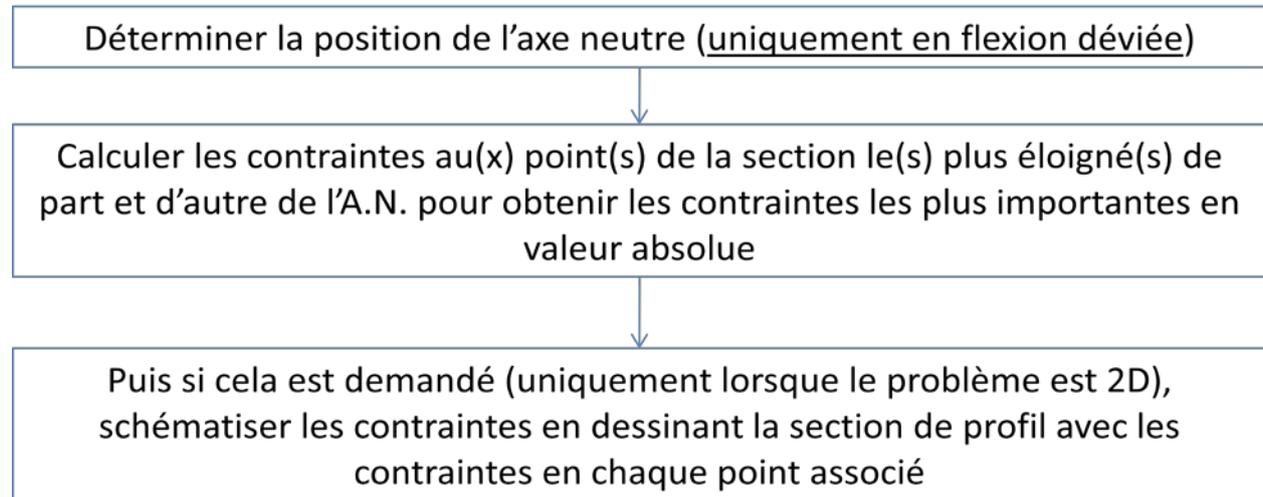
**Remarque :** On notera qu'en flexion non déviée (c'est-à-dire simple ou composée), la position des points les plus sollicités est connue sans connaître la position exacte de l'axe neutre :

- $M_z \neq 0$  et  $M_y = 0$  :
  - o Point(s) d'ordonnée  $y$  la plus grande (définition de la fibre inférieure)
  - o Point(s) d'ordonnée  $y$  la plus petite (définition de la fibre supérieure)
- $M_z = 0$  et  $M_y \neq 0$  :
  - o Point(s) de coordonnée  $z$  la plus grande (point(s) « le(s) plus à droite »)
  - o Point(s) de coordonnée  $z$  la plus petite (point(s) « le(s) plus à gauche »)

Ainsi la position de l'axe neutre n'est importante que lorsque la flexion est déviée pour pouvoir positionner les points les plus sollicités en contraintes normales.

## 10.5 Méthode

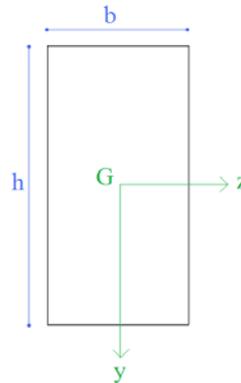
### 10.5.1 Logigramme



### 10.5.2 Exemples

#### 10.5.2.1 Géométrie des exemples

$$b = 0,5 \text{ m}$$
$$h = 1 \text{ m}$$



Donc

$$S = 1 \times 0,5 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{0,5 \times 1^3}{12} \approx 0,042 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1 \times 0,5^3}{12} \approx 0,010 \text{ m}^4$$

Exemple 1 :

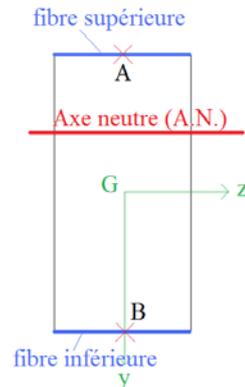
$$N = - 2500 \text{ N}$$

$$M_z = 1000 \text{ N.m}$$

$$M_y = 0 \text{ N.m}$$

Détermination de l'axe neutre

Etape inutile, puisque l'axe neutre est parallèle à l'axe z



Calculs des contraintes au niveau des points les plus éloignés de l'A.N.

Calcul sur

- n'importe quel point de la fibre supérieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en A (-h/2 ; 0)

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_A - \frac{M_y}{I_y} z_A \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{0}{0,010} \times 0 \\ &= -7000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

- n'importe quel point de la fibre inférieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en B (h/2 ; 0)

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_B - \frac{M_y}{I_y} z_B \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{1}{2} - \frac{0}{0,010} \times 0 \\ &= 17000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$N = -2500 \text{ N}$$

$$M_z = 1000 \text{ N.m}$$

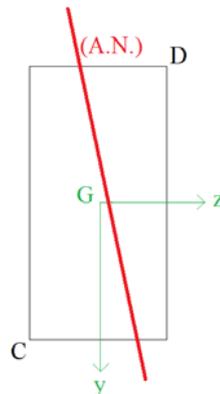
$$M_y = 1500 \text{ N.m}$$

Détermination de l'axe neutre

$$\frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{-2500}{0,5 \times 1} + \frac{1000}{\frac{0,5 \times 1^3}{12}} \times y - \frac{1500}{\frac{1 \times 0,5^3}{12}} \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 6z - 0,21$$



Calculs des contraintes au niveau des points les plus éloignés de l'A.N.

Calculs des contraintes en C ( $h/2$  ;  $-b/2$ ) et en D ( $-h/2$  ;  $b/2$ ) car ils sont les plus éloignés de l'A.N. :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_c - \frac{M_y}{I_y} z_c \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{1}{2} - \frac{1500}{0,010} \times \frac{-0,5}{2} \\ &= 53000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_D - \frac{M_y}{I_y} z_D \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{1500}{0,010} \times \frac{0,5}{2} \\ &= -43000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Exemple 3 :

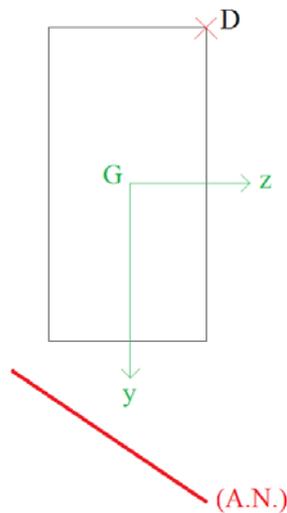
$N = 10\,000\text{ N}$

$M_z = 1000\text{ N.m}$

$M_y = 150\text{ N.m}$

Détermination de l'axe neutre

$$\begin{aligned} \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y - \frac{M_y}{I_y}z &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{10\,000}{0,5 \times 1} + \frac{1000}{\frac{0,5 \times 1^3}{12}} \times y - \frac{150}{\frac{1 \times 0,5^3}{12}} \times z &= 0 \\ \Leftrightarrow y &\approx 0,6 \cdot z + 0,83 \end{aligned}$$



Remarque importante : l'axe neutre ne coupe pas la section donc la section est entièrement comprimée puisque  $N > 0$ .

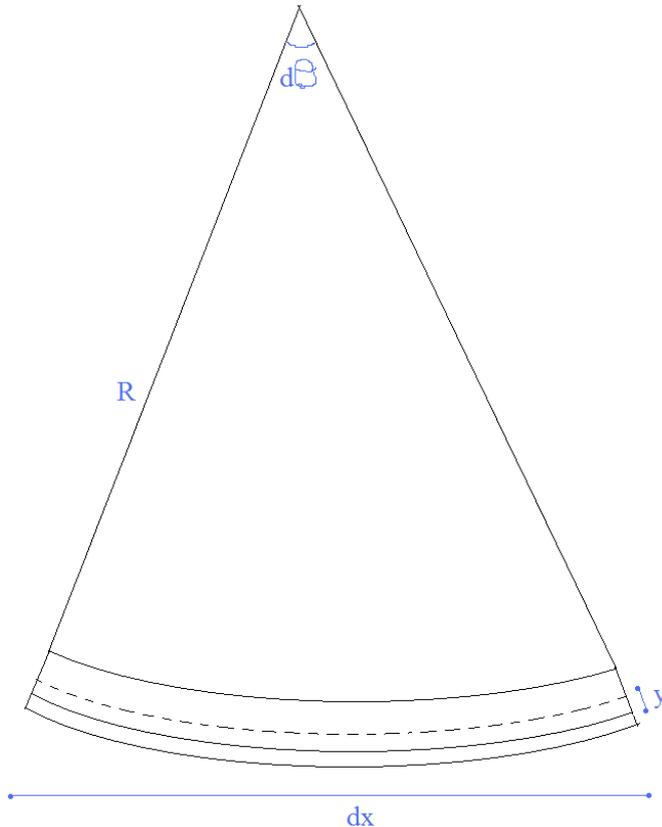
Calculs des contraintes au niveau du point le plus éloigné de l'A.N.

Calcul uniquement en D car aucun point de la section ne se trouve de l'autre côté de l'A.N.

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z}y_D - \frac{M_y}{I_y}z_D \\ &= -\frac{10\,000}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{150}{0,010} \times \frac{0,5}{2} \\ &= -35\,654\text{ Pa} \end{aligned}$$

## 11. Calcul d'une flèche (Hors programme)

Hypothèse : flexion pure selon z



$M_z$  est constant sur  $dx$ .

D'après les calculs précédents :  $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$

La loi de Hooke s'exprime par :  $E\varepsilon_x = \sigma_x$

Ainsi :  $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI_z} y$

La définition de la déformation est :  $\varepsilon_x = \frac{\text{longueur finale} - \text{longueur initiale}}{\text{longueur initiale}}$

D'où :

$$\varepsilon_x = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

Or la courbure d'une courbe plane est (voir cours prépa) :

$$R = - \frac{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}}$$

Or  $\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2} \sim 1$

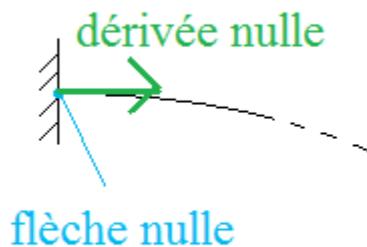
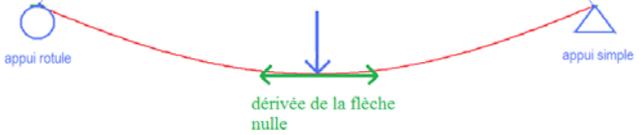
Donc  $R \approx - \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}}$  et :  $\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2}$

Au final :  $\boxed{EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x)}$

Ainsi, la flèche se calcule par la double intégrale de  $\frac{-M_z(x)}{EI_z}$ .

Hors programme

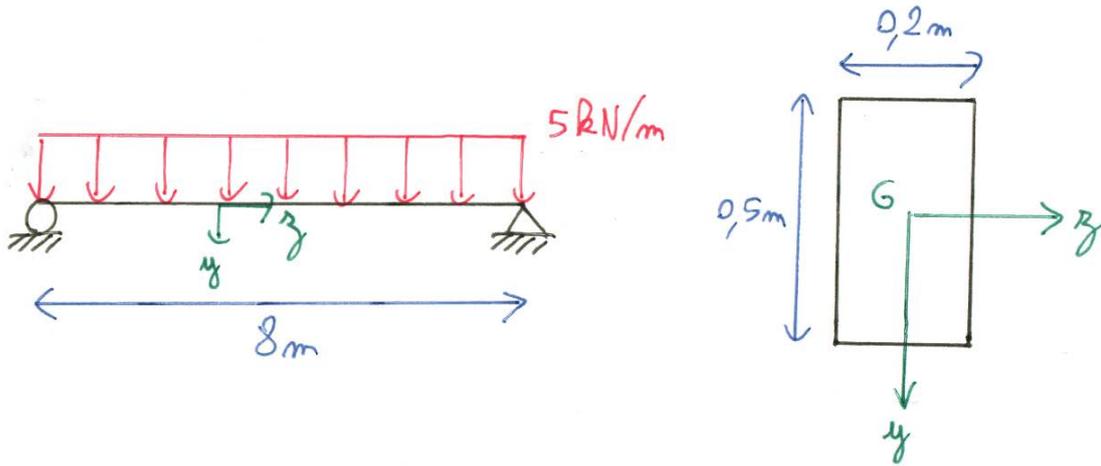
Pour intégrer, il convient de connaître les constantes en certains points de la flèche et/ou de sa dérivée :

	Représentation	Résultats sur la flèche	Résultats pour la dérivée de la flèche : $\frac{dv}{dx}$
Encastrement		$f = 0$	$\frac{dv}{dx} = 0$
Appui rotule ou appui simple		$f = 0$	
Centre d'une poutre symétrique pour la géométrie et pour le chargement			$\frac{dv}{dx} = 0$

Hors programme

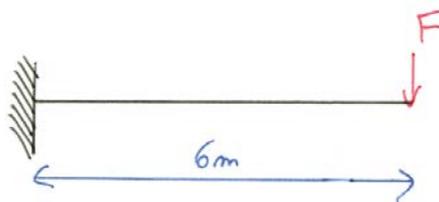
## 11.1 Exercices

### Exercice [ 1 ]



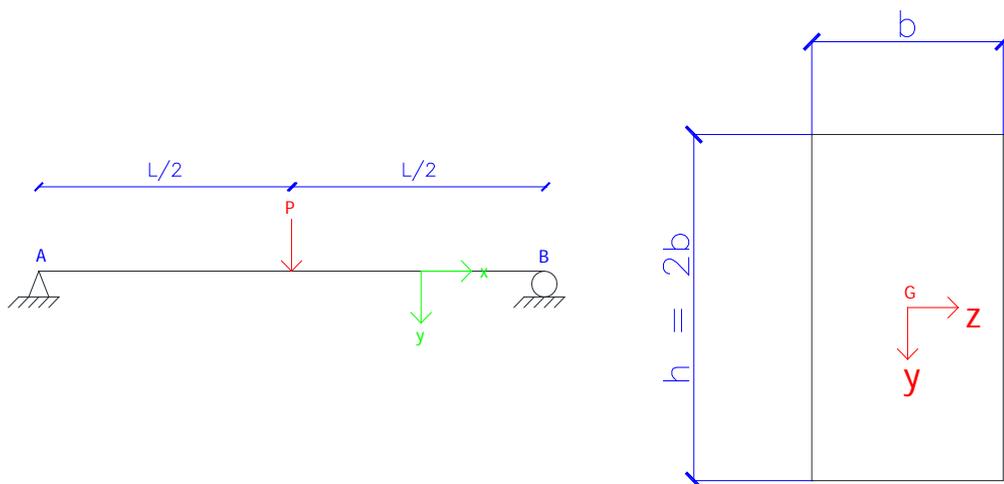
- 1) Calculer les contraintes normales maximales et minimales.
- 2) Avec  $E = 25 \text{ GPa}$ , calculer la flèche maximale.

### Exercice [ 2 ]



Avec une section rectangulaire de hauteur 1,20 m et de largeur 0,50 m et un matériau résistant à une contrainte maximale de 10 MPa en valeur absolue, calculer la force maximale pouvant être supportée par la poutre ci-contre.

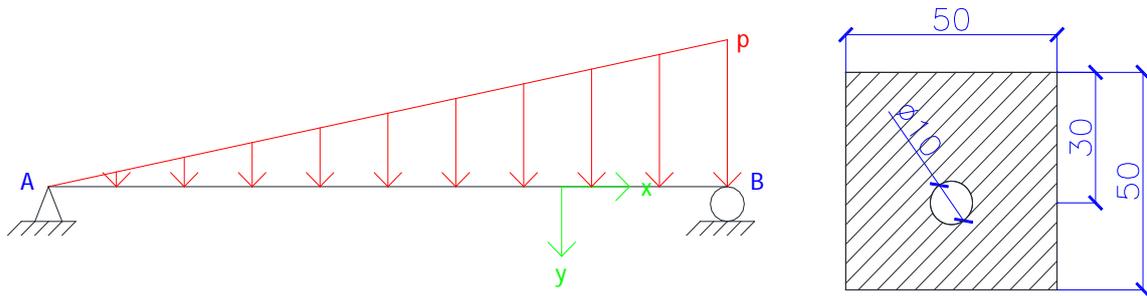
### Exercice [ 3 ]



Trouver  $h$  tel que : 
$$\begin{cases} \text{condition sur la contrainte : } |\sigma_{\max}| \leq \bar{\sigma} \\ \text{condition sur la flèche : } f_{\max} \leq \bar{f} = \frac{L}{200} \end{cases}$$

**Remarque** : le calcul de la flèche est hors programme RDM en 1<sup>ère</sup> année ENTPE.

Exercice [ 4 ]



L'unité des côtes est le cm.

Données :

$$L = 5 \text{ m}$$

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

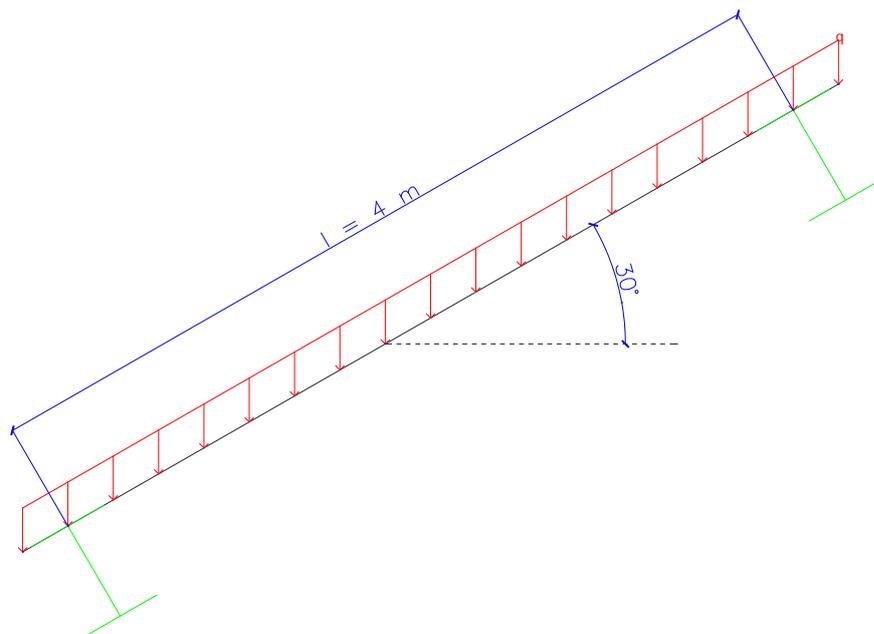
$$p = 2 \text{ kN/m}$$

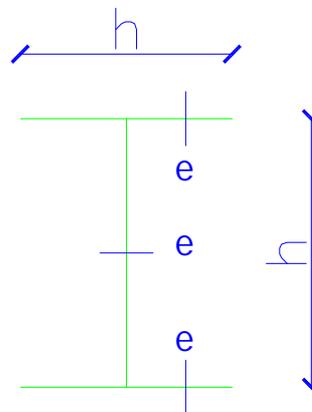
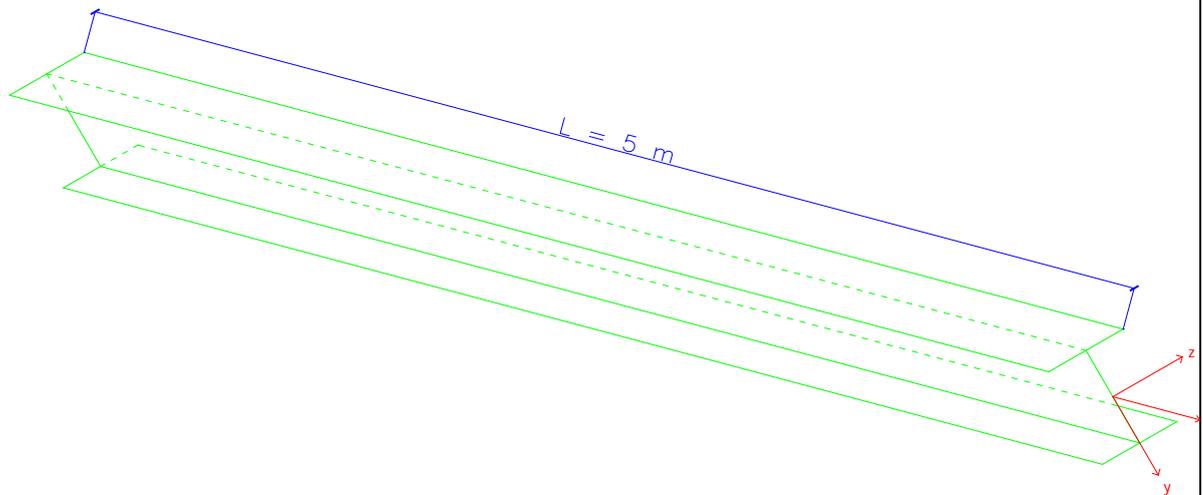
Calculer la contrainte maximale  $\sigma_{x\max}$  et la flèche maximale  $f_{\max}$

**Remarque :** le calcul de la flèche est hors programme RDM en 1<sup>ère</sup> année ENTPE.

Exercice [ 5 ]

Flexion déviée – calcul d'une panne





Données

$$e = h/10$$

Poids propre :  $g = 25 \text{ kg/m}^2$

Charge d'exploitation :  $q = 250 \text{ kg/m}^2$

Espacement entre panne :  $l = 4 \text{ m}$

Longueur des pannes :  $L = 5 \text{ m}$

Angle du toit :  $30^\circ$

Dimensionner le profilé en I afin de respecter les conditions suivantes :

- 1)  $\sigma_{\max} \leq 200 \text{ MPa}$  avec le chargement « Q » seul
- 2)  $\sigma_{\max} \leq 240 \text{ MPa}$  avec le chargement « Q + G »

### Exercice [ 6 ]

Les forces ponctuelles  $P$  s'exercent au centre des arêtes aux points  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

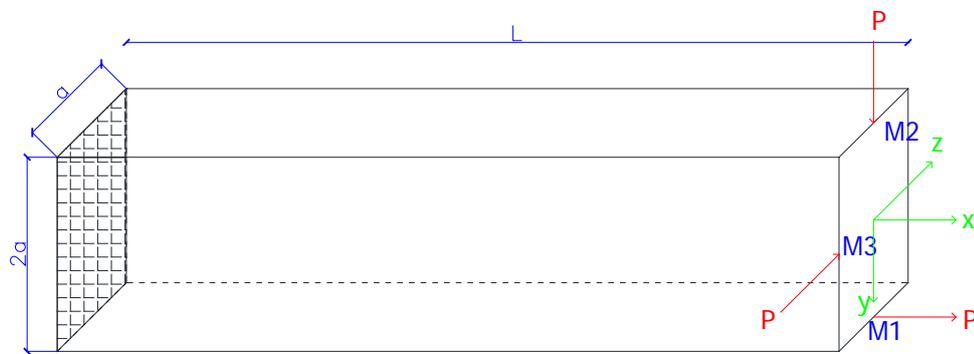
On supposera  $a$  très petit devant  $L$ .



est la face d'abscisse  $x = 0$  et est **encastrée**.

En posant  $K = \frac{x}{L}$ , déterminer l'axe neutre pour différentes sections dont les valeurs de  $K$  sont :

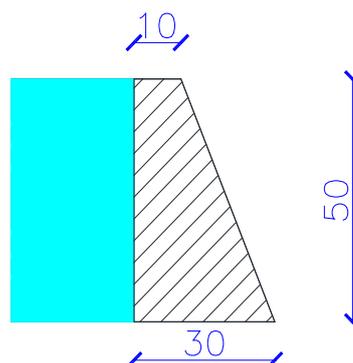
0 ; 0,5 et 1



### Exercice [ 7 ]

#### Barrage poids

L'unité de ce schéma est le m.



On raisonnera sur une largeur de barrage de 1 m.

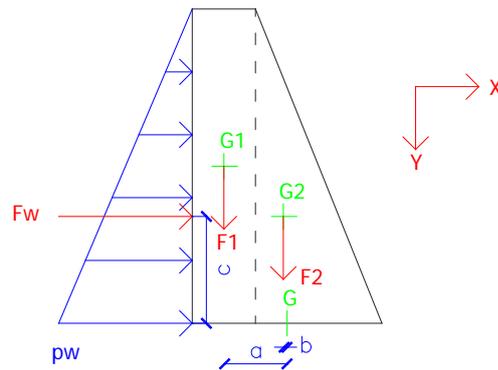
Données :

Masse volumique de l'eau :  $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

Masse volumique du béton :  $\rho_{\text{béton}} = 2500 \text{ kg/m}^3$

Accélération de la gravité :  $g = 10 \text{ m/s}^2$

1) En décomposant le barrage de la manière suivante



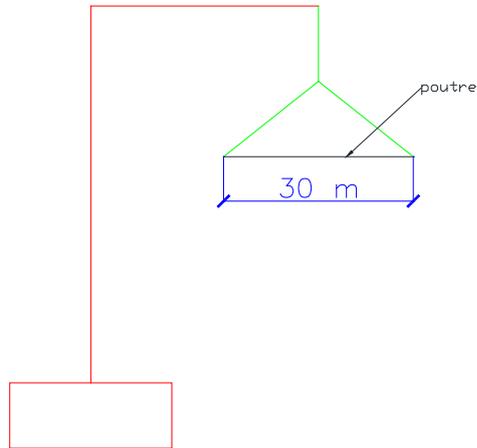
Déterminer

- la pression  $p_w$  due à l'eau à la base du barrage
  - la force équivalente  $F_w$  due à la pression de l'eau
  - les distances  $a$ ,  $b$  et  $c$
- Déterminer  $F_1$  et  $F_2$ .
  - En déduire l'effort normal  $N$  et le moment de flexion  $M_z$  au point  $G$  (centre de gravité de la base).
  - Donner la surface  $S$  et l'inertie  $I_z$  de la base (attention, raisonnement sur 1m de barrage).
  - Quelles sont les contraintes minimales et maximales à la base du barrage ?
  - Conclure : ce barrage est-il bien dimensionné ?

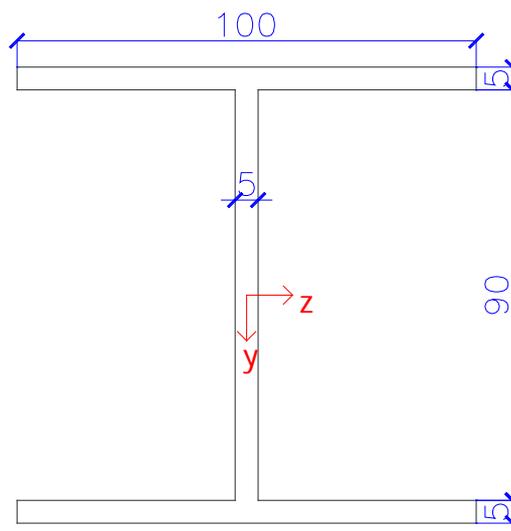
Exercice [ 8 ]

Problème du grutier

Un grutier propose de soulever une poutre de la manière suivante :



Les côtes de la section en mm sont :



La contrainte maximale du matériau est :  $\sigma_{\max} = 240 \text{ MPa}$

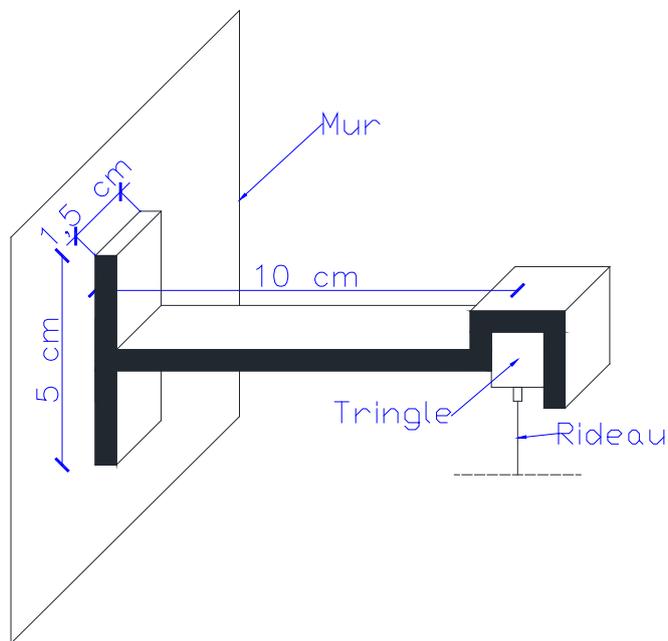
La masse volumique de l'acier est :  $\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$

- 1) Pourquoi le conducteur de travaux refuse ?
- 2) Quelle solution simple peut-il apporter ?

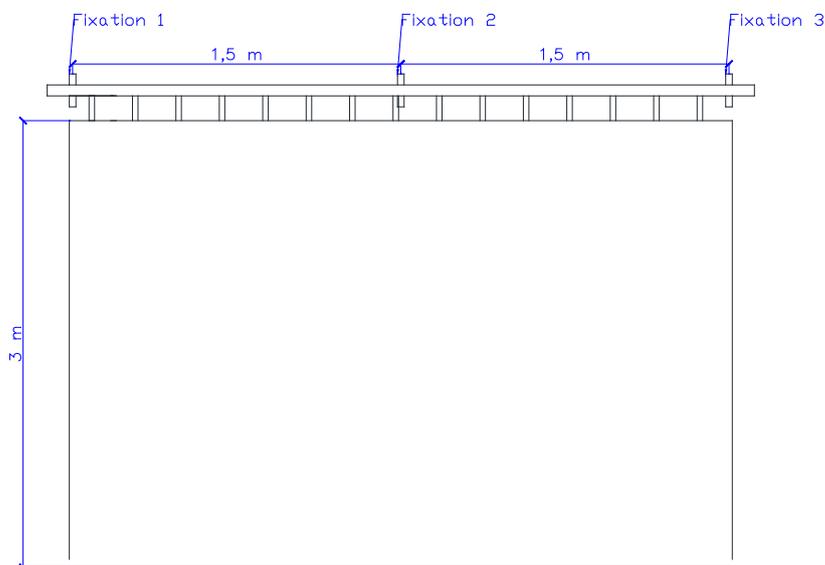
Exercice [ 9 ]

Fixation d'une tringle à rideau

Vue en perspective d'une fixation de tringle à rideau



La vue de face du rideau

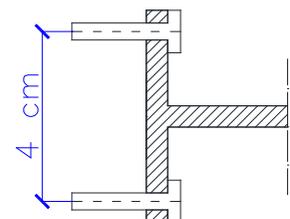


On admettra que la fixation 2 retient la moitié du poids du rideau et que les fixations 1 et 3 un quart du poids du rideau chacune.

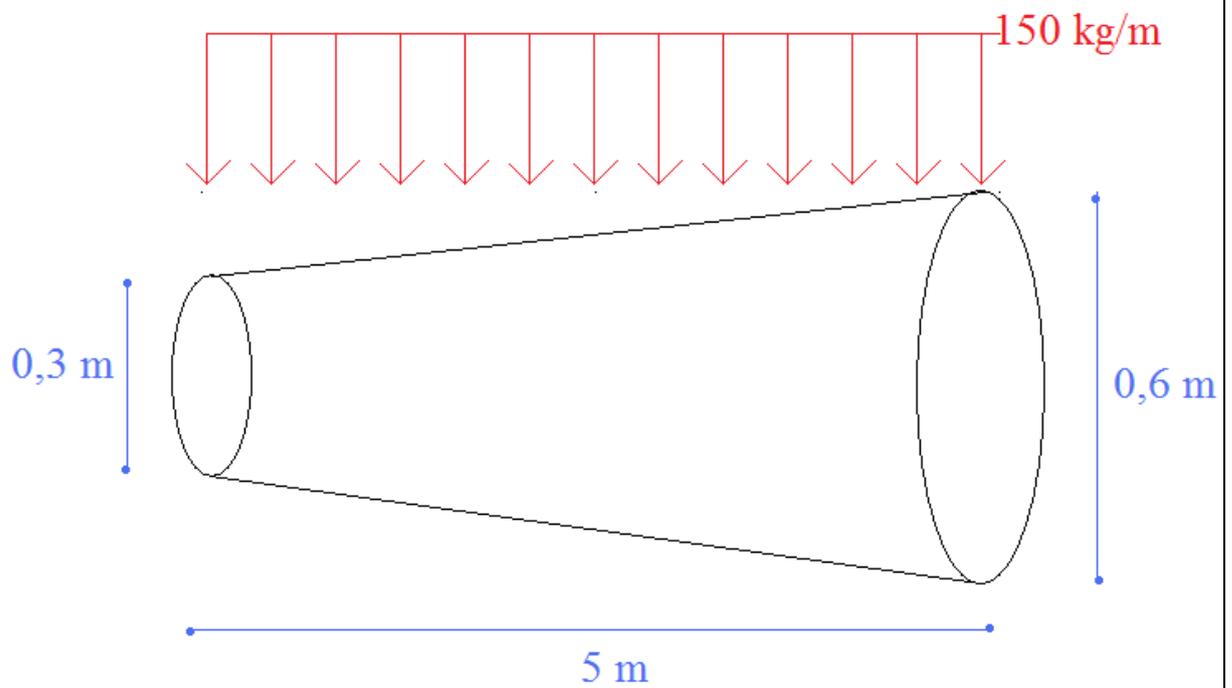
La masse surfacique du rideau est  $450 \text{ g/m}^2$ .

1) Est-il possible de coller les fixations avec une colle résistante à  $100 \text{ kg/m}^2$  ?

2) Si on choisit une solution avec des vis, dont la contrainte maximale doit être inférieure à  $80 \text{ MPa}$ , correspondant au schéma suivant, quel doit être le diamètre minimal des vis ?



Exercice [ 10 ]



Trouver la contrainte maximale  $\sigma_{\max}$ .

## 12. Noyau central

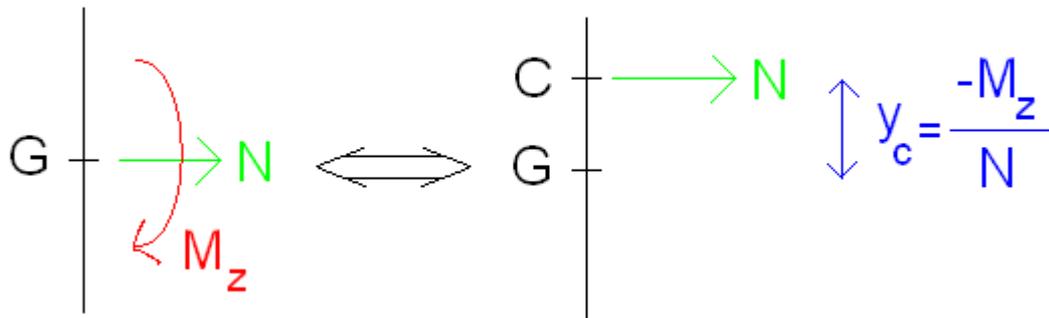
### 12.1 Point de passage

#### Définition du point de passage

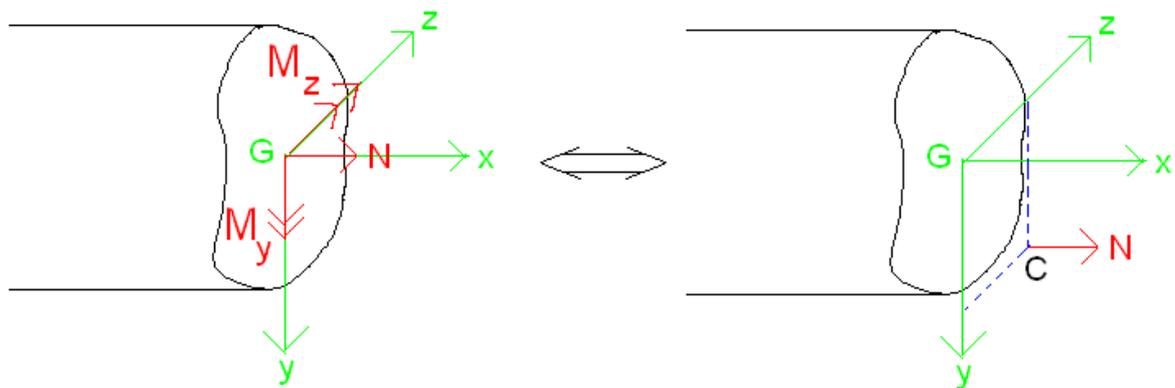
Point du plan de la section droite où le torseur des forces de gauche se réduit uniquement à l'effort normal.

*Remarque* : ce point est également appelé centre de flexion.

En 2D :



En 3D :

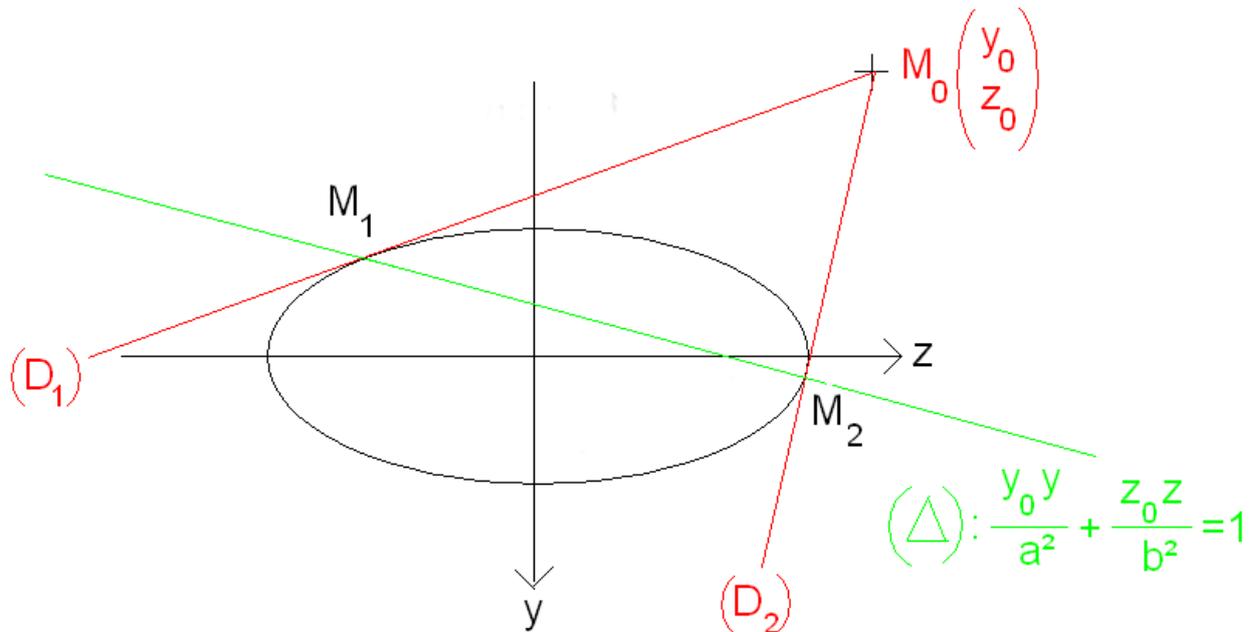


Avec  $y_c = \frac{-M_z}{N}$  et  $z_c = \frac{M_y}{N}$

## 12.2 Outils mathématiques

### 12.2.1 Polaire d'un point par rapport à une ellipse

(D<sub>1</sub>) et (D<sub>2</sub>) sont les droites tangentes à l'ellipse passant par le point M<sub>0</sub>.



#### Equation d'une ellipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

#### Définition d'une polaire par rapport à un point

La polaire de M<sub>0</sub> par rapport à l'ellipse est la droite (Δ) qui passe par M<sub>1</sub> et M<sub>2</sub>.

M<sub>0</sub> est le pôle de la droite (Δ) par rapport à l'ellipse.

#### Définition d'une antipolaire par rapport à un point

L'antipolaire de M<sub>0</sub> par rapport à l'ellipse est la droite (Δ') qui est symétrique par rapport au centre de gravité de la polaire (Δ) de M<sub>0</sub> (par rapport à l'ellipse).

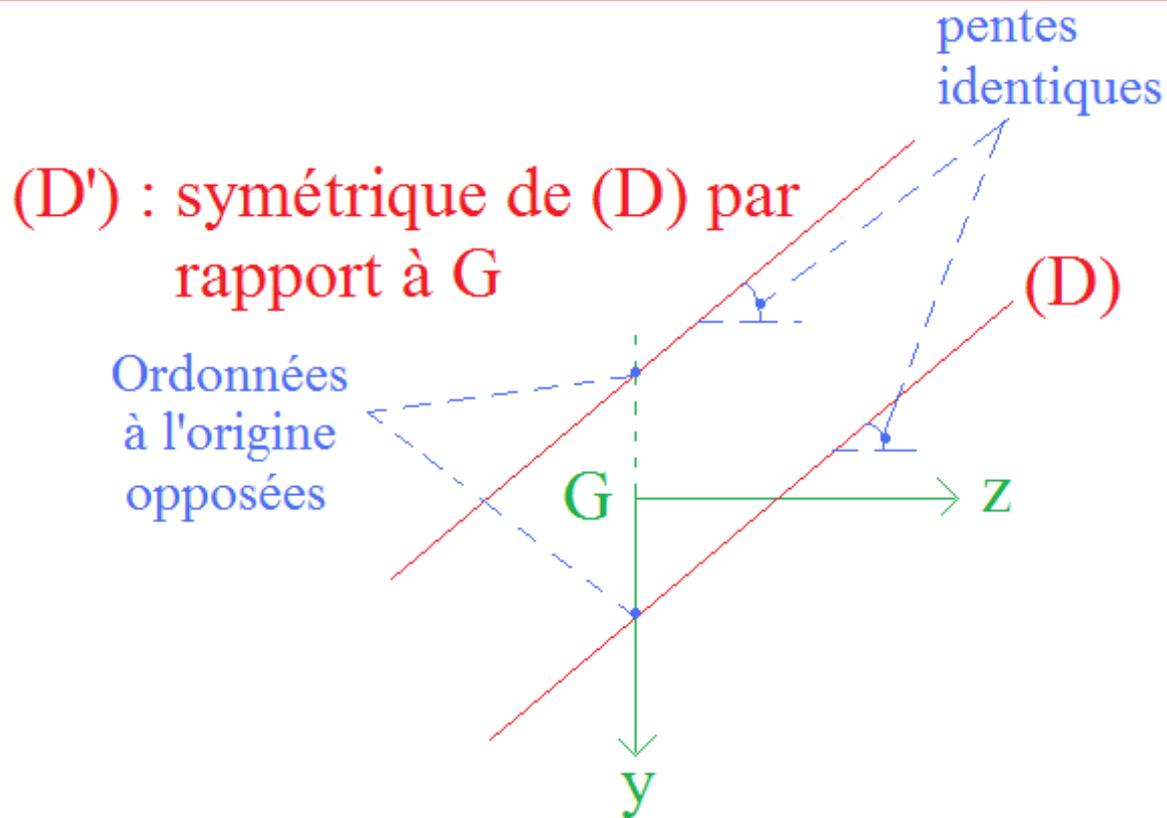
#### Equation de la droite symétrique à une droite par rapport à G

Soit une droite (D) d'équation de type :

$$y = A.z + B$$

La droite symétrique (D') par rapport à l'origine de notre repère (dans le contexte de la RDM, il s'agit de G) a pour propriétés :

- La pente de la droite symétrique par rapport à G reste inchangée
- l'ordonnée à l'origine de la droite symétrique par rapport G a un signe opposé par rapport à la droite initiale



Ainsi, la symétrie par rapport à G est la droite (D') d'équation :

$$y = A.z - B$$

### 12.3 Application en RDM- Ellipse centrale d'inertie

#### Définition d'une ellipse centrale d'inertie (ECI)

L'ECI est définie par l'équation :

$$\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$$

S : aire de la section

$I_z$  (resp.  $I_y$ ) : moments d'inertie par rapport à l'axe Z (resp. Y)

#### Equation d'une polaire d'un point par rapport à l'ECI

En posant un point  $M_0$  un point de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_{Gyz}$$

La polaire de  $M_0$  par rapport à l'ellipse est la droite ( $\Delta$ ) a pour équation :

$$\frac{yy_0}{I_z} + \frac{zz_0}{I_y} = \frac{1}{S}$$

## 12.4 Noyau central d'une section droite

### Définition du noyau central

Zone telle que :

Si le point de passage appartient au noyau central (frontière incluse) alors l'axe neutre ne coupe pas la section

Sinon l'axe neutre coupe la section.

### Propriété

Pour une section donnée, le noyau central est l'ensemble des points qui sont à l'intérieur de l'ensemble des antipolaires des points du contour de la section par rapport à l'ECI.

## 12.5 Méthode

### 12.5.1 Logigramme

Calcul de l'ellipse d'inertie :  $\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$

1) Détermination de la position du centre de gravité

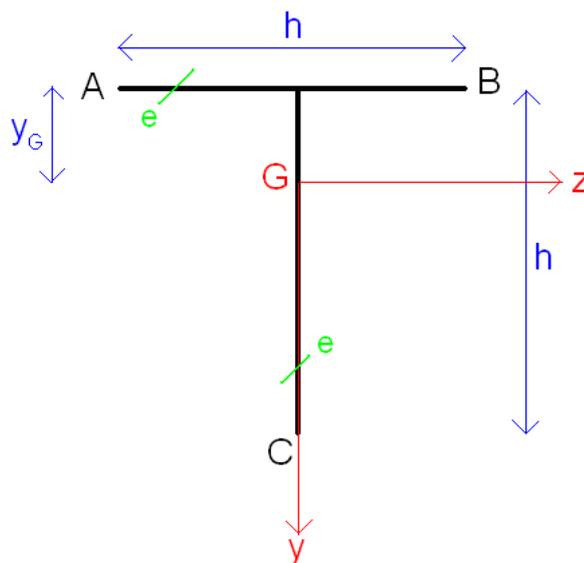
2) Détermination des caractéristiques géométriques de la section (surface S et moments d'inertie  $I_y$  et  $I_z$ )

A chaque point du contour M ( $y_M ; z_M$ ), tracé de la polaire de M de droite d'équation :  $\frac{y y_M}{I_z} + \frac{z z_M}{I_y} = \frac{1}{S}$

Pour chaque polaire, tracé de l'antipolaire (droite symétrique de la polaire par rapport au centre de gravité G de la section)

L'ensemble des points à l'intérieur des antipolaires constitue le noyau central (NC)

### 12.5.2 Exemple 1



Calculer puis dessiner le noyau central en supposant que  $e \ll h$

Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

Moments d'inertie

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

ECl :  $\frac{48y^2}{5h^2} + \frac{24z^2}{h^2} = 1$

Coordonnées des points du contour

$$A \begin{pmatrix} -h/4 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -h/4 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3h/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polaire de A

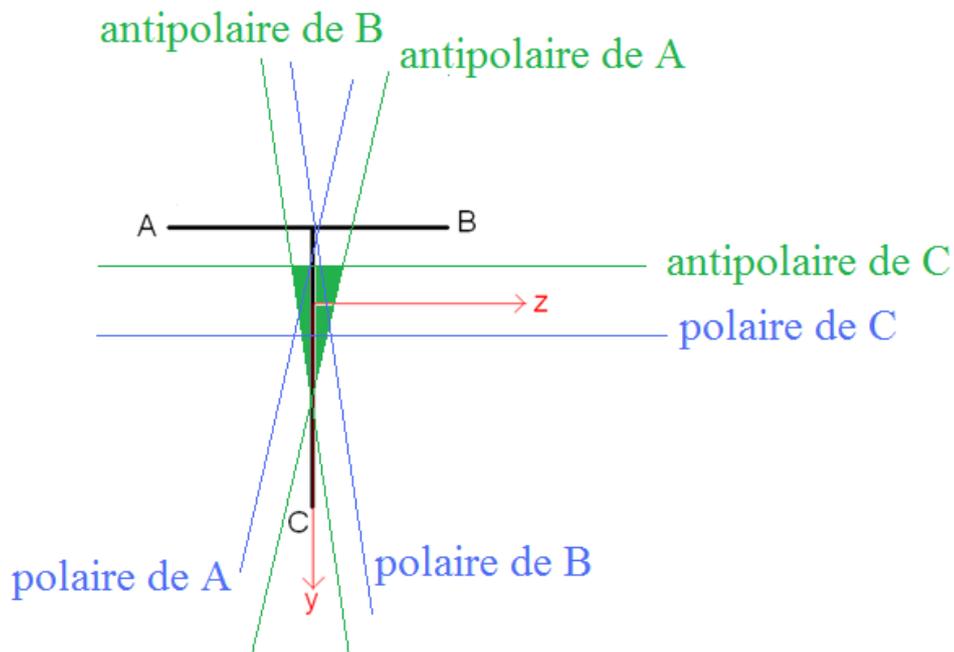
$$\begin{aligned} \frac{48y}{5h^2} \times \frac{-h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times \frac{-h}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{-12y}{5h} - \frac{12z}{h} &= 1 \end{aligned}$$

Polaire de B : La polaire de B est la symétrique de la polaire de A par rapport à l'axe  $\vec{y}$ .

Polaire de C

$$\begin{aligned} \frac{48y}{5h^2} \times \frac{3h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times 0 &= 1 \\ \Rightarrow y &= \frac{5h}{36} \end{aligned}$$

Noyau central (surface verte)

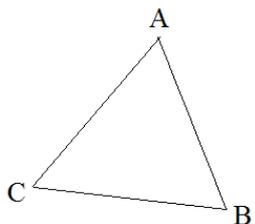
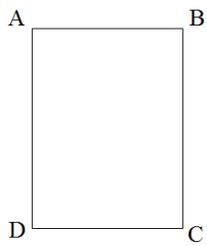
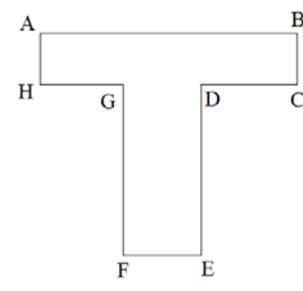
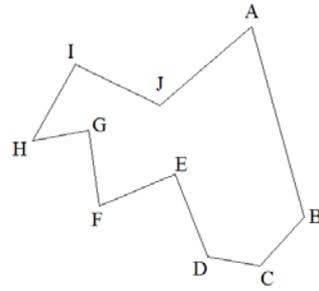


### 12.5.3 Méthodes pratiques pour « gagner en rapidité »

#### 12.5.3.1 Choix des points du contour

Tous les points de contour ne sont pas à prendre en compte pour le tracé des antipolaires. Le choix se porte sur les points de contours tels que s'ils sont reliés les uns par rapport aux autres par des segments, ils forment une surface incluant tous les points de la section.

Exemples :

N°	Section	Points nécessaires pour le tracé des antipolaires
1		Les antipolaires de A, B et C doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.
2		Les antipolaires de A, B, C et D doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.
3		Les antipolaires de A, B, C, E, F et H doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.  Les antipolaires de D et de G ne sont pas à tracer car ces points sont inclus dans la forme précédente.
4		Les antipolaires de A, B, C, D, F, H et I doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.  Les antipolaires de E, G et J ne sont pas à tracer car ces points sont inclus dans la forme précédente.

### 12.5.3.2 Tracé des antipolaires

Les étapes 2 et 3 du logigramme (tracés de la polaire, puis de l'antipolaire qui est la droite symétrique par rapport à G) peuvent être résumées par :

Cas 1 :

M a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} y_M \neq 0 \\ z_M \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{yy_M}{I_z} + \frac{zz_M}{I_y} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow y = -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \cdot z + \frac{I_z}{S \cdot y_M}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de polaire par rapport à G, a donc pour équation :

$$y = -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \cdot z - \frac{I_z}{S \cdot y_M}$$

Cette droite passe par les points suivants :

$$N_1 \left( 0 ; -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \right)_{Gyz}$$

$$N_2 \left( -\frac{I_z}{S \cdot y_M} ; 0 \right)_{Gyz}$$

Cas 2 :

M a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} y_M = 0 \\ z_M \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{zz_M}{I_y} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow z = \frac{I_y}{z_M \times S}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de l'antipolaire a pour équation :

$$z = -\frac{I_y}{z_M \times S}$$

Cas 3 :

M a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} y_M \neq 0 \\ z_M = 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{yy_M}{I_z} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow y = \frac{I_z}{y_M \times S}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de l'antipolaire a pour équation :

$$y = -\frac{I_z}{y_M \times S}$$

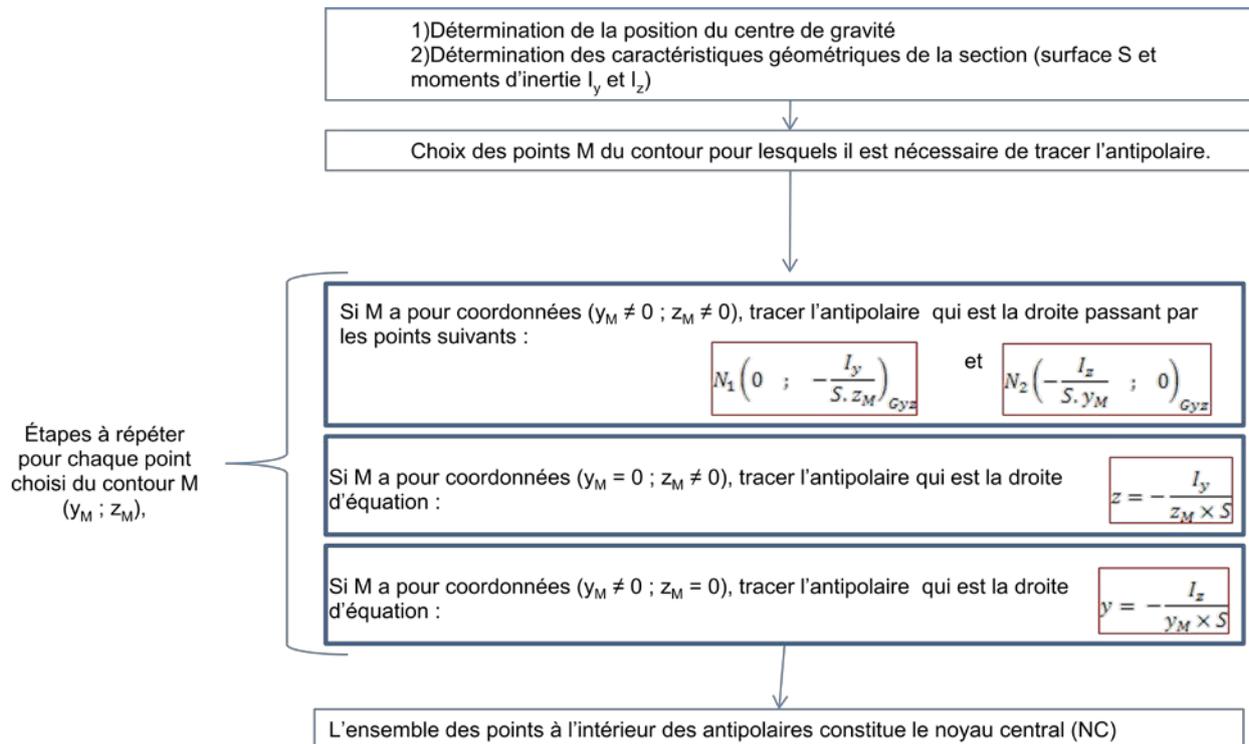
### 12.5.3.3 Propriété de symétrie des antipolaires

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'origine du repère G, alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à G.

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'axe  $G\vec{y}$ , alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à l'axe  $G\vec{y}$ .

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'axe  $G\vec{z}$ , alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à l'axe  $G\vec{z}$ .

### 12.5.3.4 Logigramme simplifié



L'exemple 1 aurait donc pu être traité (plus rapidement) par application du logigramme simplifié.

#### Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

#### Propriétés géométriques

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

$$S = 2eh$$

#### Choix des points de contour

$$A \begin{pmatrix} -h/4 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -h/4 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3h/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : B est symétrique de A par rapport à l'axe  $G\vec{y}$ , ainsi il est inutile de calculer l'équation de l'antipolaire de B puisqu'il suffit de tracer la symétrique de l'antipolaire de A par rapport à l'axe  $G\vec{y}$ .

#### Antipolaire de A

$$\begin{pmatrix} y_A \neq 0 \\ z_A \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz} \Rightarrow \text{l'antipolaire passe par les points}$$

$$N_1 \left( \boxed{0} ; -\frac{I_{Gy}}{S \cdot z_A} = \frac{\frac{eh^3}{12}}{2eh \cdot \left(-\frac{h}{2}\right)} = \boxed{-\frac{h}{12}} \right)_{Gyz}$$

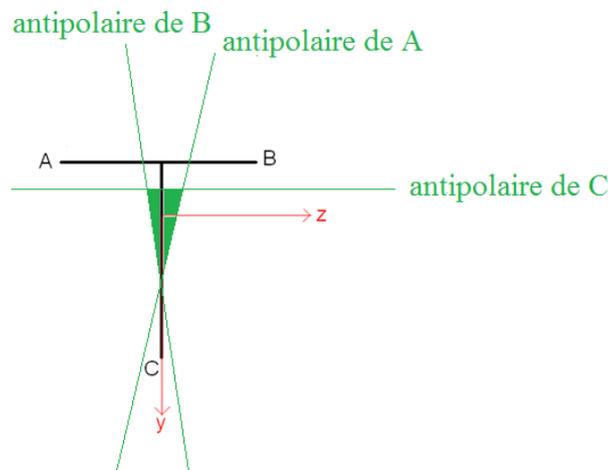
$$N_2 \left( -\frac{I_{Gz}}{S \cdot y_A} = -\frac{5h}{12} ; \boxed{0} \right)_{Gyz}$$

Antipolaire de B : L'antipolaire de B est la symétrique de l'antipolaire de A par rapport à l'axe  $\vec{Gy}$ .

Antipolaire de C

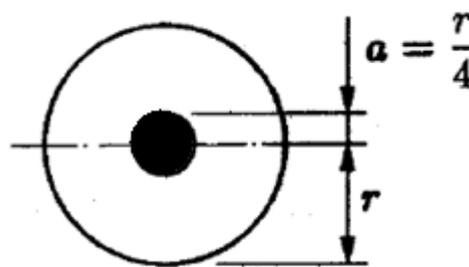
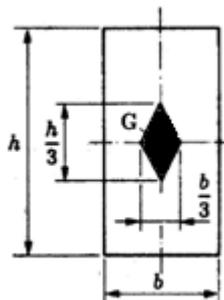
$$\begin{pmatrix} y_C \neq 0 \\ z_C = 0 \end{pmatrix}_{Gyz} \Rightarrow \text{l'antipolaire a pour equation : } y = -\frac{I_z}{y_C \times S} = -\frac{5h}{36}$$

Noyau central (surface verte)



#### 12.5.4 Résultats à connaître

NC des sections pleines rectangulaires et circulaires

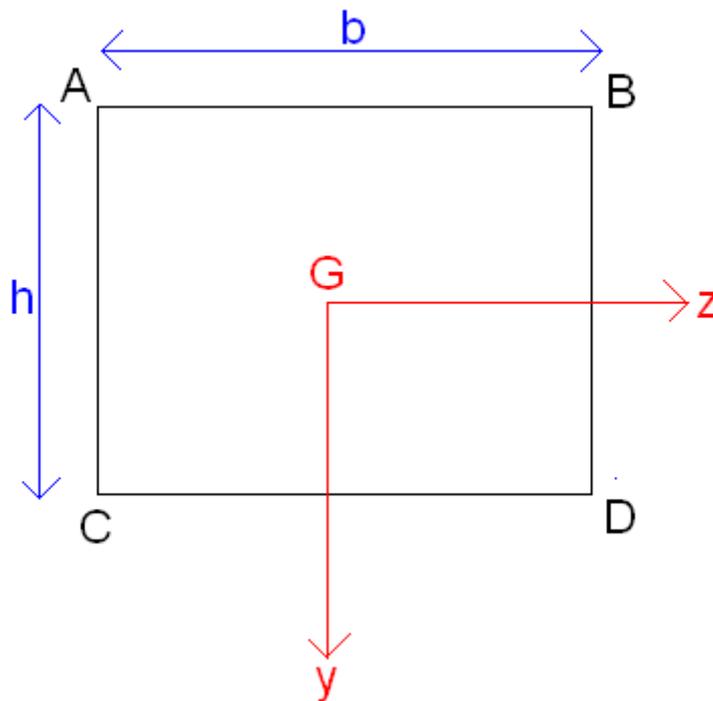


Utilisation du noyau central pour une force N excentrée

	Etat de la section	$N \in (NC)$	$N \notin (NC)$
	$N > 0$	Entièrement comprimée	Section partiellement comprimée
	$N < 0$	Entièrement tendue	

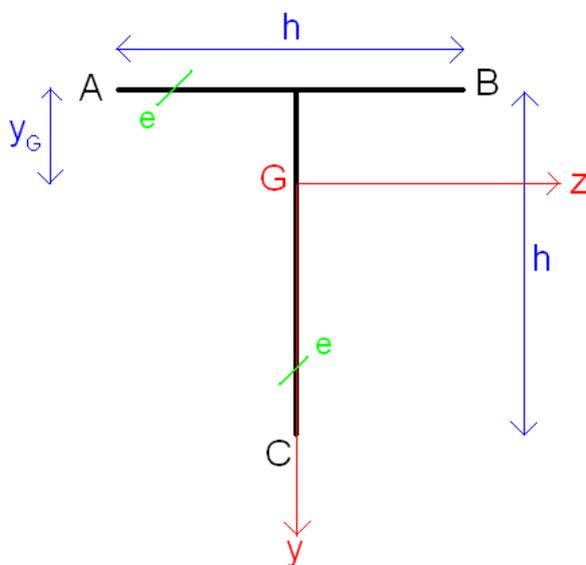
## 12.6 Exercices

### Exercice [ 11 ]



Calculer puis dessiner le noyau central d'une section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ .

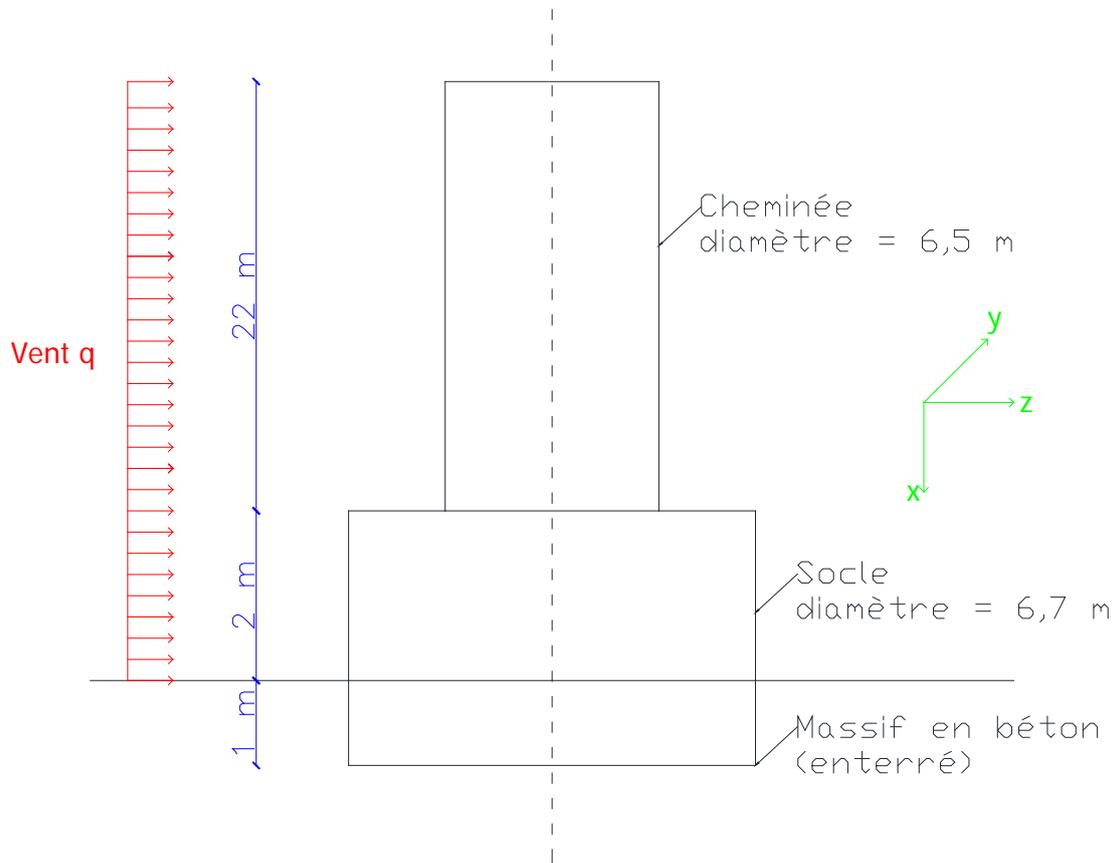
### Exercice [ 12 ]



Calculer puis dessiner le noyau central en supposant que  $e \ll h$

Exercice [ 13 ]

Etude de la stabilité d'une cheminée



Une structure formée d'une cheminée de 480 tonnes, reposant sur un socle en béton de 120 tonnes, repose sur un massif de béton de densité massique de  $2,3 \text{ tonnes/m}^3$ .

Cette structure est soumise à l'action du vent de densité de  $200 \text{ kg/m}^2$ .

La résultante de H de cette force peut être donnée par la relation de Lery :  $H = \frac{2}{3} qS$

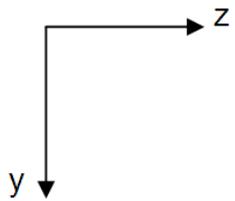
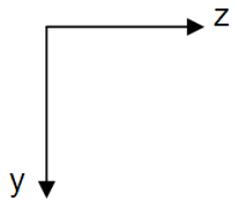
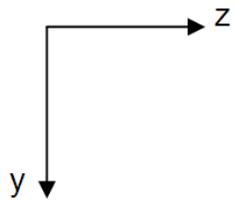
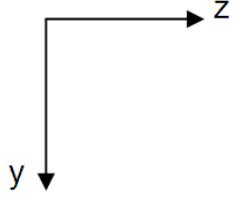
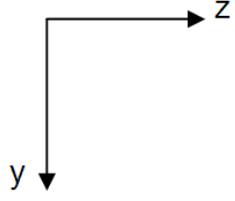
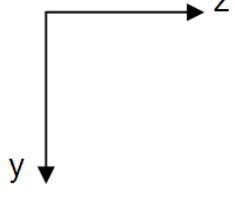
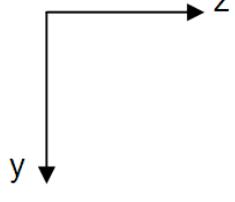
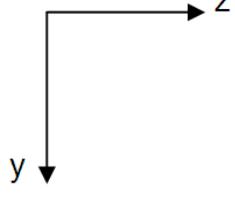
Où S est le maître couple :  $S = \text{diamètre} \times \text{hauteur}$

- 1) Calculer la position du centre de pression (ou encore appelé point de passage) sous la surface d'assise (sous le massif en béton)
- 2) Chercher la position de l'axe neutre et tracer le diagramme de répartition des contraintes dans la section d'assise.
- 3) Vérifier que la section est comprimée.

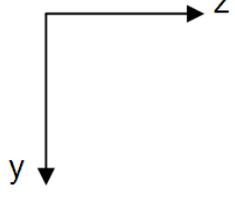
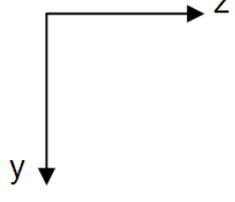
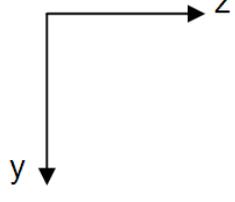
Exercice [ 14 ]

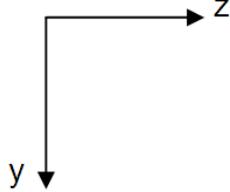
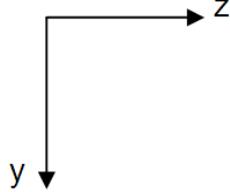
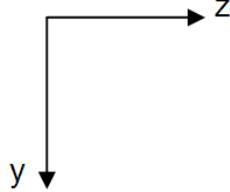
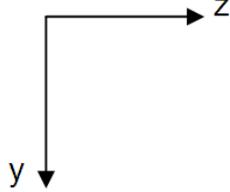
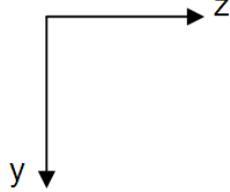
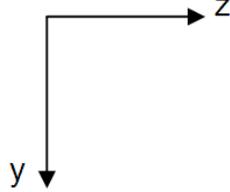
Dessiner l'état de contrainte d'une section pour les situations suivantes (hachurer zone tendue) :

1)  $N = 0$

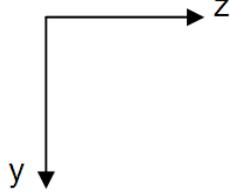
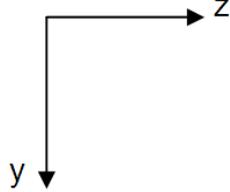
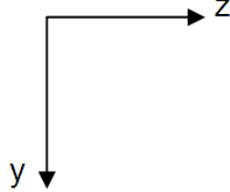
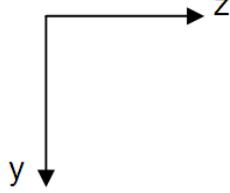
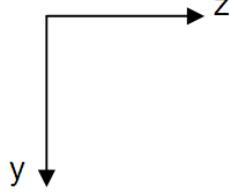
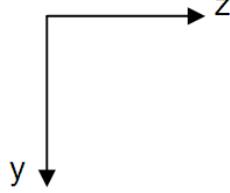
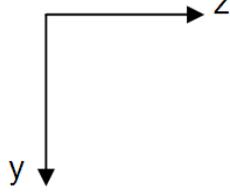
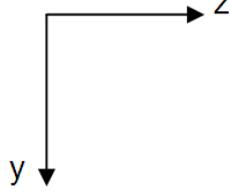
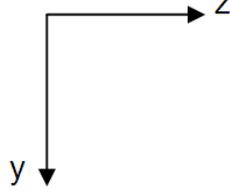
	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			
$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

2)  $N > 0$

	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			

$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

1)  $N < 0$

	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			
$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

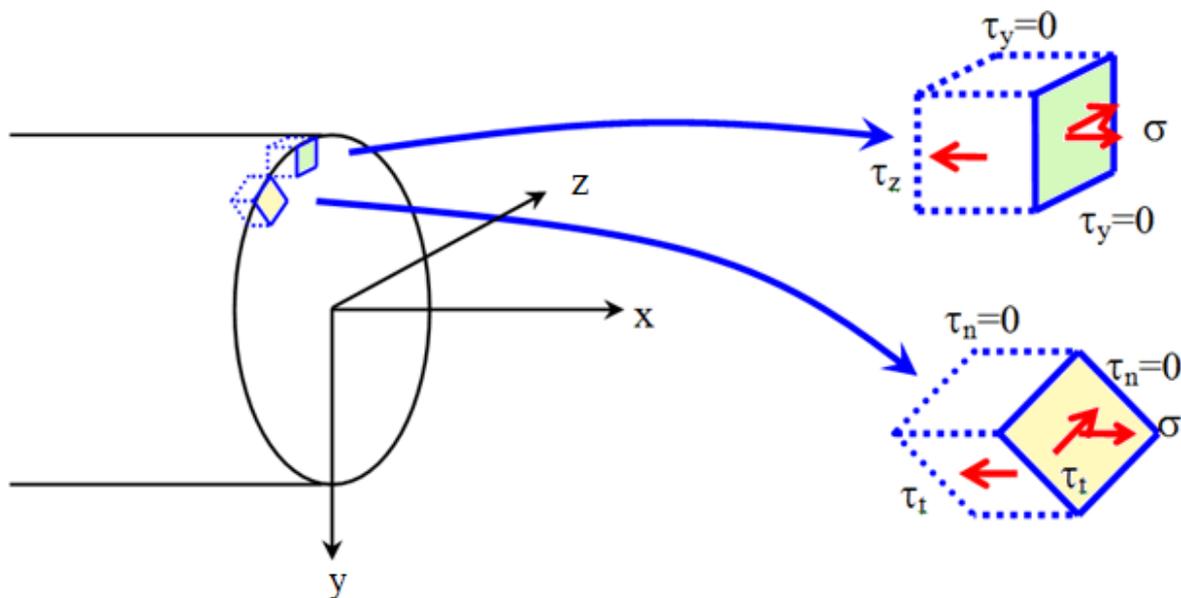
## 13. Etude de l'effort tranchant dans les sections massives

### 13.1 Propriétés des contraintes tangentes

La forme du tenseur des contraintes dans une section droite :  $(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$

#### 13.1.1 Contrainte de cisaillement sur le contour

Dans une section droite, en un point du contour extérieur, la contrainte de cisaillement est tangente à ce contour.



### 13.2 Théorème de la coupure

#### 13.2.1 Hypothèses

1. La poutre est de section constante.
2. Pas de variation de l'effort normal  $N$  sur le tronçon de poutre  $dx$ .

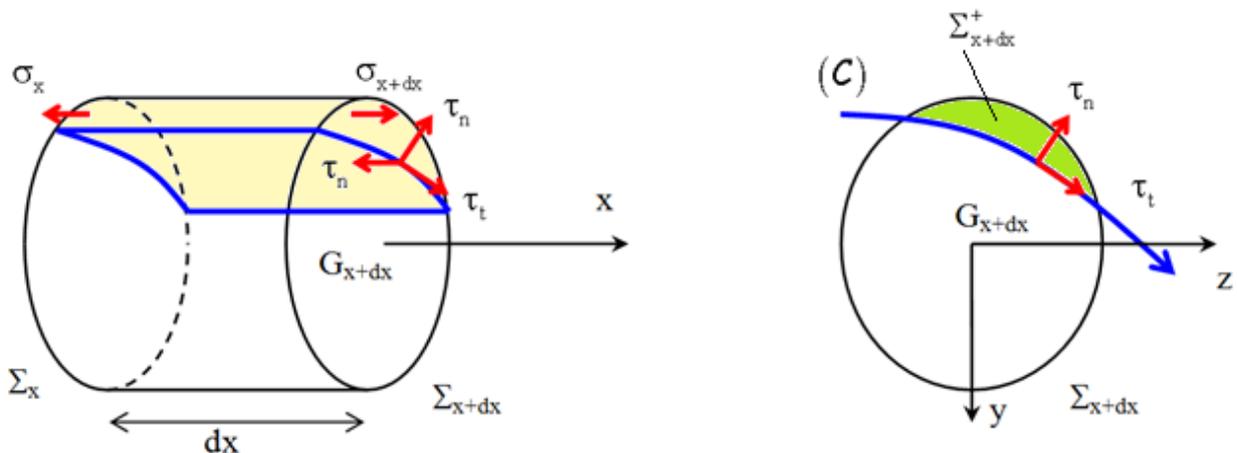
#### 13.2.2 Notation

$\Sigma_x$  : section d'abscisse  $x$  et  $G_x$  son centre de gravité.

$(C)$  : courbe orientée séparant la section  $\Sigma_x$  en deux parties.

$\Sigma_x^+$  : partie à gauche de  $(C)$  de la section de  $\Sigma_x$ .

$\sigma_x$  : contrainte normale  $\sigma$  dans la section  $\Sigma_x$ .



La contrainte tangente se décompose en  $\tau_t$  tangent à (C) et  $\tau_n$  perpendiculaire à (C) dirigé vers  $\Sigma_x^+$ .

Remarque : le trièdre  $(\vec{i}, \vec{t}, \vec{n})$  est un trièdre direct.

### 13.2.3 Equation d'équilibre

Avec  $S_z(\Sigma^+)$  le moment statique de la section droite  $\Sigma^+$  par rapport à un axe z

Et  $S_y(\Sigma^+)$  le moment statique de la section droite  $\Sigma^+$  par rapport à un axe y

$$\int_{(C)} \tau_n d\ell = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

### 13.2.4 Rappel sur le moment statique

Définition du moment statique

Le moment statique d'une section droite  $\Sigma$  par rapport à un axe  $\Delta$  est définie par :  $S_\Delta = \int_\Sigma \delta dS$

On en déduit :  $S_x = \int_\Sigma Y dS$  et  $S_y = \int_\Sigma X dS$

Remarque : Si l'axe  $\Delta$  est un axe de symétrie, nous avons :  $S_\Delta = 0$

### 13.2.5 Propriété du centre de gravité

Avec  $X_G$  et  $Y_G$  les coordonnées de du centre de gravité et A l'aire de la section droite  $\Sigma$  :

$$Y_G = \frac{\int_\Sigma Y dS}{A} \quad \text{et} \quad X_G = \frac{\int_\Sigma X dS}{A}$$

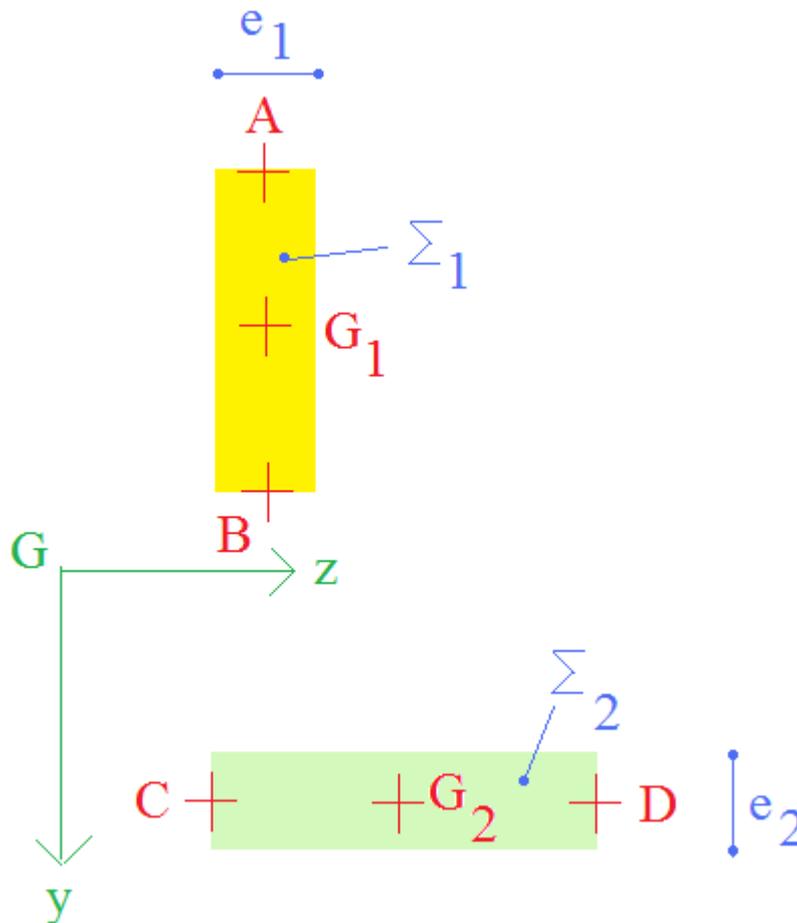
Remarque : Pour tout axe de symétrie  $\Delta$  :  $S_\Delta = 0$ , donc le centre de gravité G appartient à tout axe de symétrie de la section droite.

### 13.2.6 Exemple de calculs de moments statiques

La majorité des moments statiques à calculer sont ceux de rectangles dont

- les coordonnées des points milieu des largeurs sont connues
- la largeur est connue

Par exemple, cherchons les moments statiques des surfaces  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  suivantes :



### Surface $\Sigma_1$

Le centre de gravité  $G_1$  de la surface  $\Sigma_1$  a pour coordonnées :

$$y_{G_1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_{G_1} = z_A = z_B$$

La surface  $\Sigma_1$  vaut :

$$S_1 = e_1 \cdot (y_B - y_A)$$

Ainsi les moments statiques valent :

$$S_z(\Sigma_1) = y_{G_1} \cdot S_1 = \frac{y_A + y_B}{2} \cdot e_1 \cdot (y_B - y_A) = \frac{e_1}{2} \cdot (y_B^2 - y_A^2)$$

$$S_y(\Sigma_1) = z_{G_1} \cdot S_1 = z_A \cdot e_1 \cdot (y_B - y_A)$$

### Surface $\Sigma_2$

Le centre de gravité  $G_2$  de la surface  $\Sigma_2$  a pour coordonnées :

$$y_{G_2} = y_C = y_D$$

$$z_{G2} = \frac{z_C + z_D}{2}$$

La surface  $\Sigma_2$  vaut :

$$S_1 = e_2 \cdot (z_D - z_C)$$

Ainsi les moments statiques valent :

$$S_z(\Sigma_2) = y_{G2} \cdot S_1 = y_C \cdot e_2 \cdot (z_D - z_C)$$

$$S_y(\Sigma_2) = z_{G2} \cdot S_1 = \frac{z_C + z_D}{2} \cdot e_2 \cdot (z_D - z_C) = \frac{e_2}{2} \cdot (z_D^2 - z_C^2)$$

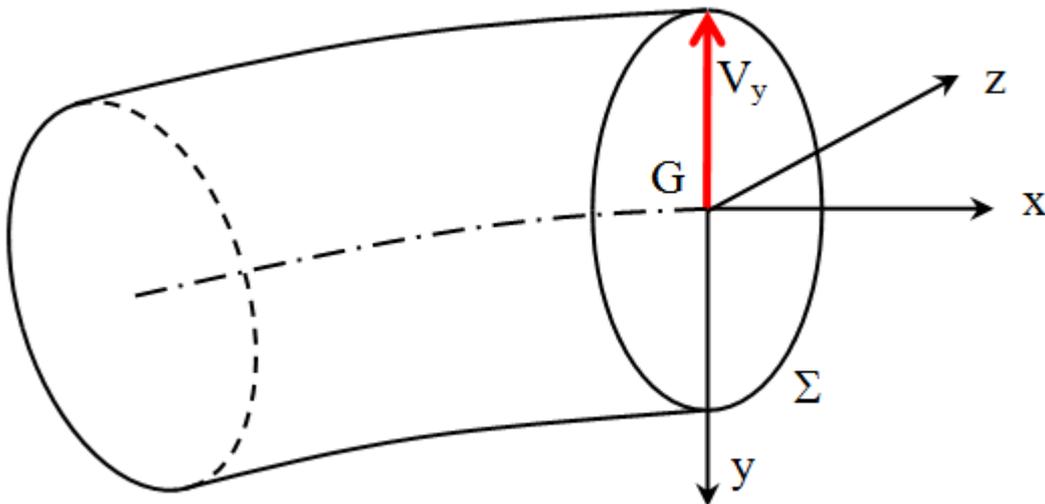
### 13.3 Conséquence sur une section massive

#### 13.3.1 Définition d'une section massive

Une section massive est une section droite dont aucune dimension définissant la section n'est petite par rapport à d'autres.

#### 13.3.2 Théorie élémentaire

Soit une section droite sollicitée par un effort tranchant  $V_y$  :



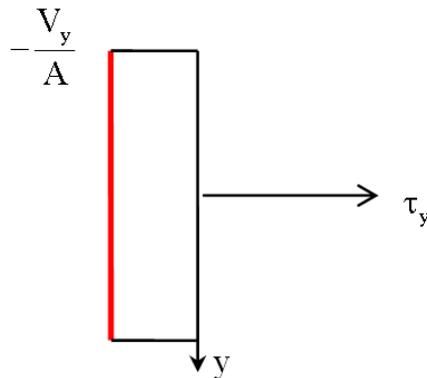
#### Hypothèse

Les contraintes tangentées n'ont qu'une composante  $\tau_y$  se répartissant uniformément sur la

section :  $\tau_y = -\frac{V_y}{A}$

### Conséquences

La répartition des contraintes de cisaillement est :



**Important :** Cette théorie élémentaire est en contradiction avec le fait que la contrainte de cisaillement est tangente en tout point du contour de la section.

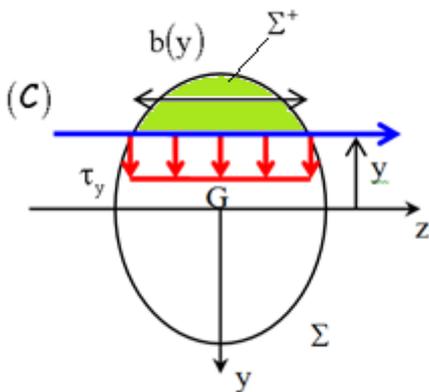
### 13.3.3 Théorie RDM

#### 13.3.3.1 Hypothèse

Un effort tranchant  $V_y$  (resp.  $V_z$ ) n'induit que des contraintes tangentes  $\tau_y$  (resp.  $\tau_z$ ) constantes dans la largeur de la section (resp. la hauteur de la section).

#### 13.3.3.2 Application du théorème de la coupure

On applique le théorème de la coupure à la courbe (C) suivant :



Le théorème de la coupure donne :

$$\int_{(C)} -\tau_y d\ell = -\tau_y b(y) = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

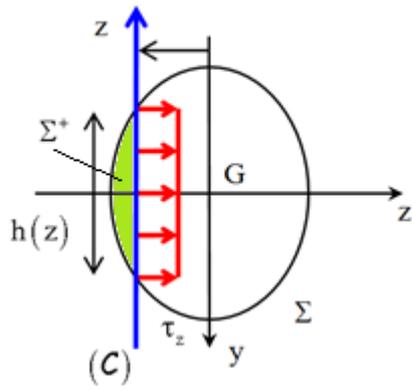
Soit : 
$$\tau_y = \frac{V_y}{I_z} \frac{S_z(\Sigma^+)}{b(y)}$$

Le théorème de la coupure donne :

$$\int_{(C)} -\tau_z d\ell = -\tau_z h(y) = -\frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

Soit : 
$$\tau_z = \frac{V_z}{I_y} \frac{S_y(\Sigma^+)}{h(z)}$$

On applique le théorème de la coupure à la courbe (C) suivant :



## 13.5 Méthode

### 13.5.1 Logigramme

Phase 1 : on traite uniquement l'effort tranchant  $V_y$

Faire une coupure parallèle à l'axe  $z$  pour chaque surface massive élémentaire à l'ordonnée  $y$ .

*Exemples* : 1 coupure pour un rectangle, 2 coupures pour une section en T, etc.

Calculer le moment statique de la surface ( $\Sigma^+$ ) :

- Déterminer l'ordonnée  $y_{G\Sigma^+}$  du centre de gravité de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Déterminer l'aire  $S_{\Sigma^+}$  de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Le moment statique est égal à :  $S_z(\Sigma^+) = y_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+}$

Déterminer la largeur de la coupure à l'ordonnée  $y$ .

Et finalement, la contrainte de cisaillement est égal à

$$\tau_y = \frac{V_y S_z(\Sigma^+)}{I_z b(y)}$$

Phase 2 : on fait de même avec l'effort tranchant  $V_z$  (en adaptant légèrement...)

Faire une coupure parallèle à l'axe  $y$  pour chaque surface massive élémentaire à la profondeur  $z$ .

Calculer le moment statique de la surface ( $\Sigma^+$ ) :

- Déterminer la profondeur  $z_{G\Sigma^+}$  du centre de gravité de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Déterminer l'aire  $S_{\Sigma^+}$  de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Le moment statique est égal à :  $S_y(\Sigma^+) = z_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+}$

Déterminer la largeur de la coupure à la profondeur  $z$

Et finalement, la contrainte de cisaillement est égale à

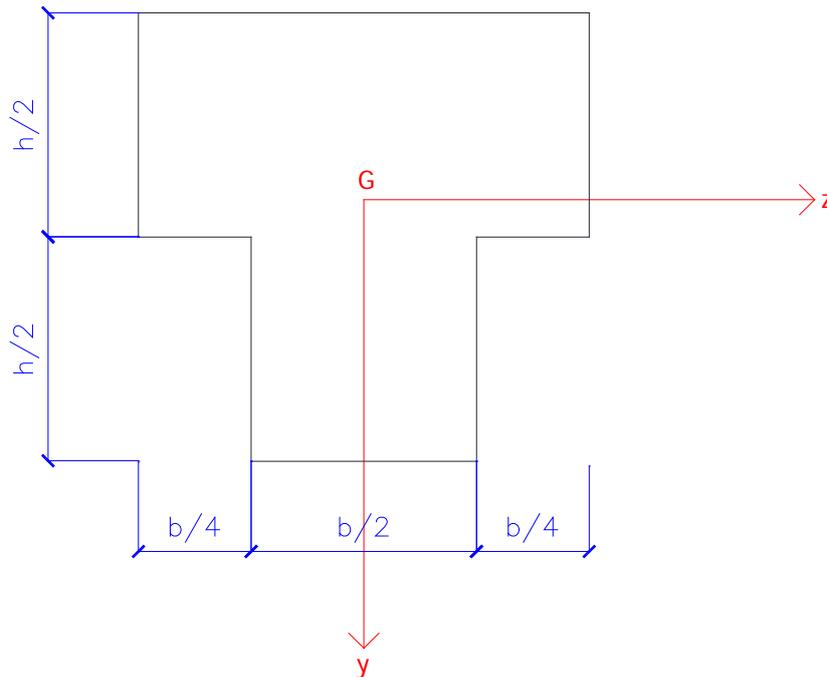
$$\tau_z = \frac{V_z S_y(\Sigma^+)}{I_y h(z)}$$

### Exercice [ 15 ]

Donner la répartition de contrainte de cisaillement pour une section rectangulaire de largeur  $b$  et de hauteur  $h$ , soumise à un effort tranchant  $V_y$

### Exercice [ 16 ]

La section suivante est soumise à un effort tranchant  $V_y$



1) Déterminer la position du centre de gravité

2) Déterminer l'inertie  $I_z$

3) Donner la répartition de contrainte de cisaillement.

## 14. Etude de l'effort tranchant dans les sections minces symétriques

### 14.1 Profil mince fermé

#### 14.1.1 Définitions

##### Définition d'un profil mince

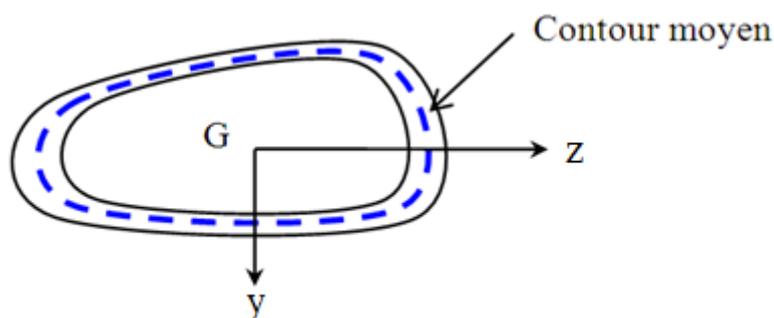
Un profil mince est une section droite à parois mince dont l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions de la section.

##### Définition d'un Contour moyen

Le contour moyen d'un profil mince est la courbe définie au milieu de l'épaisseur du profil mince.

##### Définition d'un profil mince fermé

Un profil mince fermé est un profil mince dont le contour moyen est une courbe fermée.



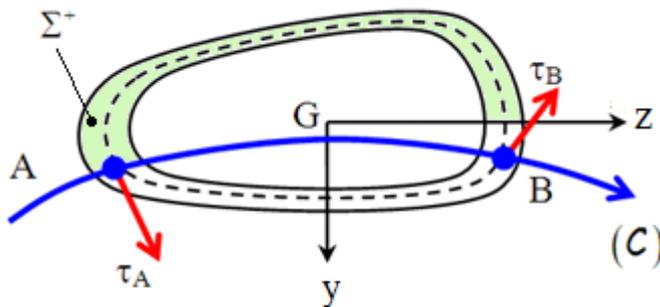
#### 14.1.2 Hypothèses

1. Les contraintes tangentes sont tangentes au contour moyen.
2. Les contraintes tangentes sont constantes dans l'épaisseur du profil.

Les relations entre les contraintes tangentes et les efforts intérieurs imposent

$$\begin{cases} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = V_z \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \end{cases}$$

### 14.1.3 Application du théorème de la coupure



Remarque : nous prenons comme convention de direction des contraintes tangentes, celle qui fait parcourir un point courant du contour moyen dans le sens trigonométrique.

L'application du théorème de la coupure donne :

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

### 14.2 Profil mince ouvert

Nous considérons une section, à profil mince ouvert, **symétrique** par rapport à l'axe  $y$ , et soumise à un effort tranchant  $V_y$ .

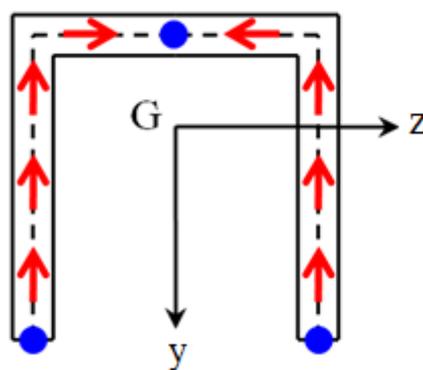
#### Propriétés

Pour ces sections, la répartition des contraintes est symétrique par rapport à l'axe  $Gy$ .

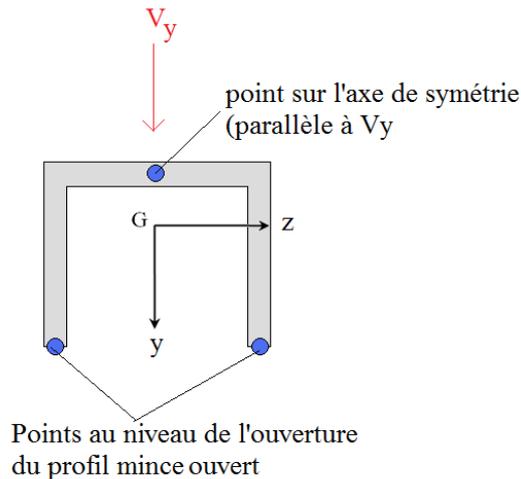
De plus, si l'épaisseur est continue, il en est de même de la répartition des contraintes tangentes le long du contour moyen (le flux de cisaillement devant être continu).

Tous les points du contour moyen appartenant à l'axe de symétrie, auront une contrainte tangente nulle.

Il en est de même au niveau de l'ouverture du profil du fait de la réciprocité du tenseur des contraintes.



Exemple de points où la contrainte de cisaillement est nul pour un profil mince ouvert



### 14.3 Méthode - Logigramme

Choisir un point B servant de référence tel que le cisaillement soit nul (B appartient à un axe de symétrie parallèle à l'effort tranchant considéré ou se situe au niveau d'une ouverture),

Faire une coupure pour chaque « branche » au niveau d'un point A.  
Nota : La partie (AB) constitue la surface ( $\Sigma^+$ ).

Calculer le moment statique de la surface ( $\Sigma^+$ ) :

- Déterminer l'ordonnée  $y_{G\Sigma^+}$  et la profondeur  $z_{G\Sigma^+}$  du centre de gravité de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Déterminer l'aire  $S_{\Sigma^+}$  de la surface ( $\Sigma^+$ )
- Les moments statiques sont égaux à :  
 $S_z(\Sigma^+) = y_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+}$  et  $S_y(\Sigma^+) = z_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+}$

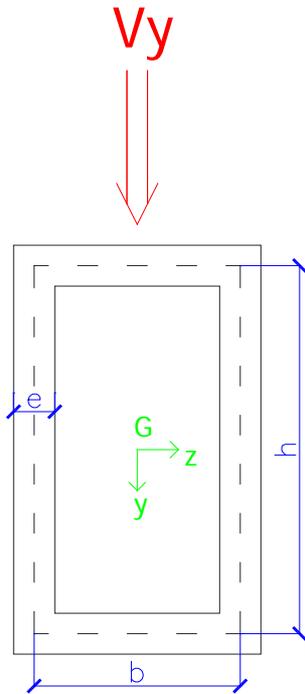
Et finalement, la contrainte de cisaillement est égal à

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

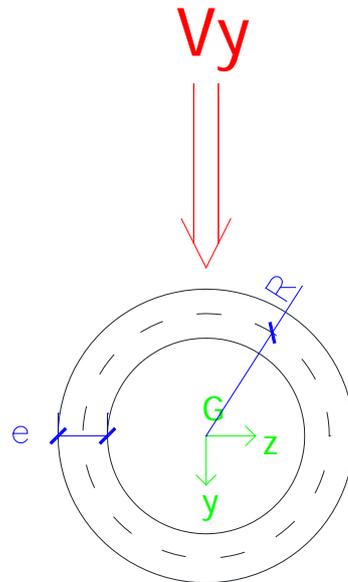
### 14.4 Exercices

#### Exercice [ 17 ]

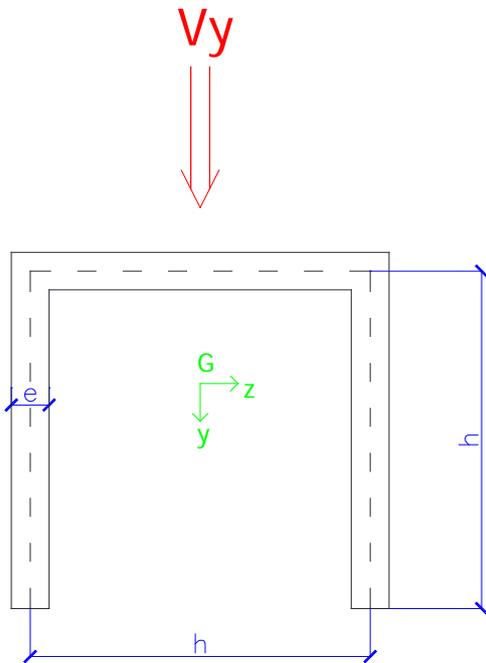
Calculer les contraintes tangentes (en donnant les diagrammes de contrainte) dues à l'effort tranchant  $V_y$ .



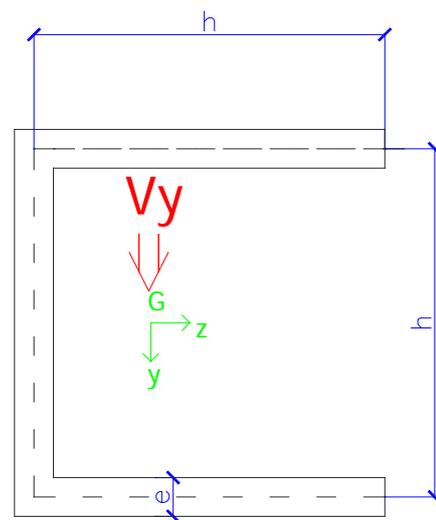
a)



b)



c)

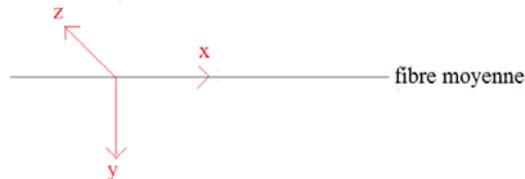


d)

## 15. Etude de la torsion

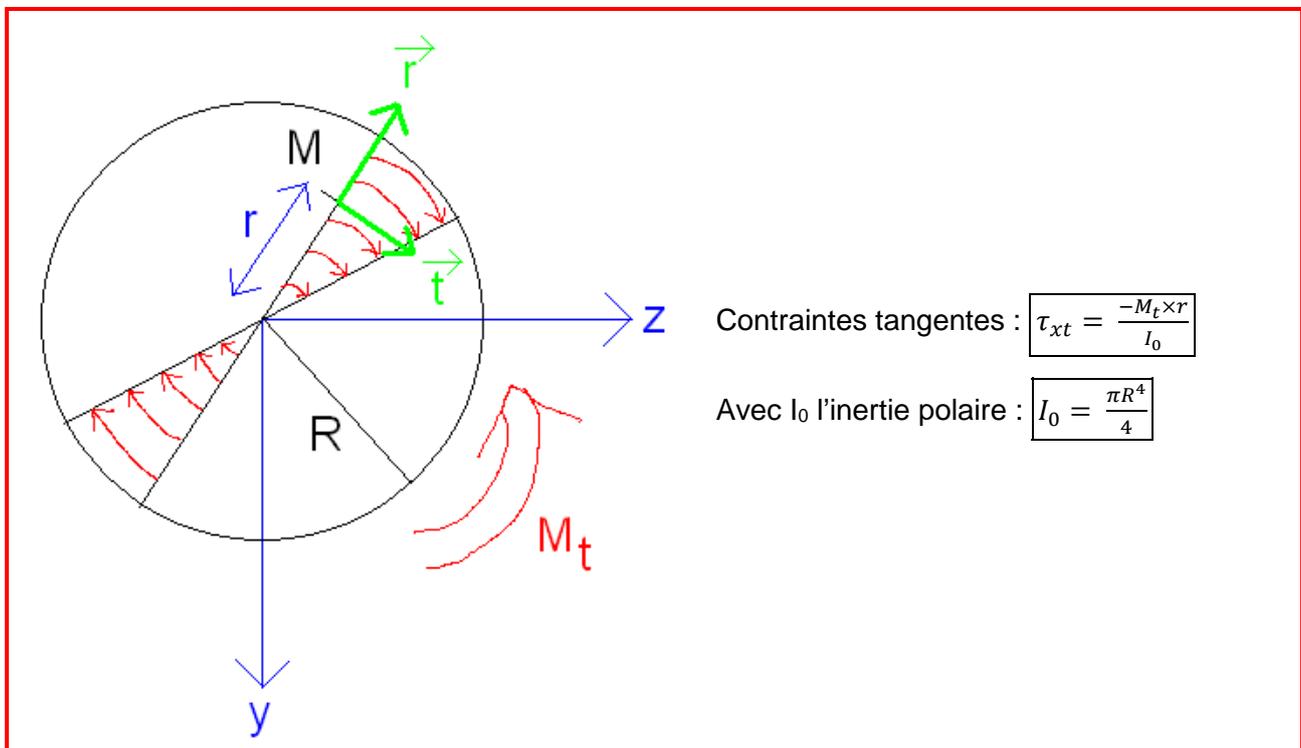
Notation :

Le moment de torsion s'écrit  $M_t$  ou  $M_x$  dans le torseur  $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$  avec le repère :

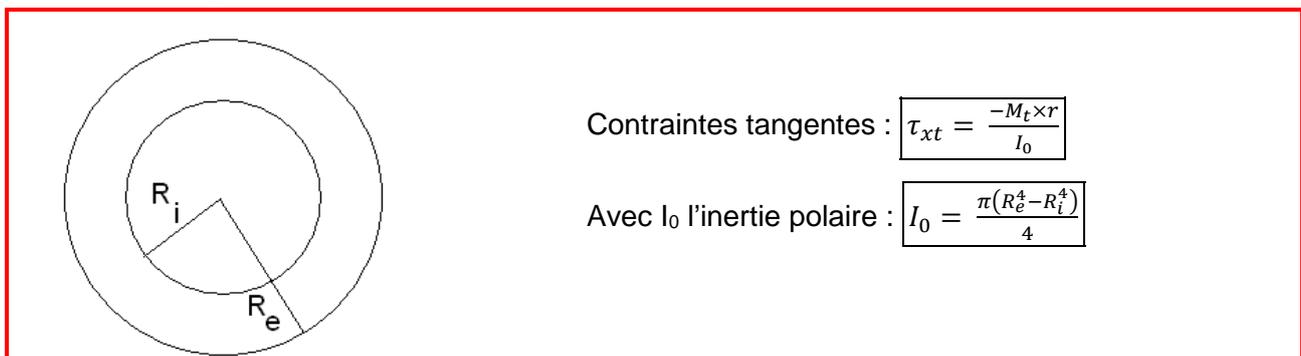


### 15.1 Section circulaire

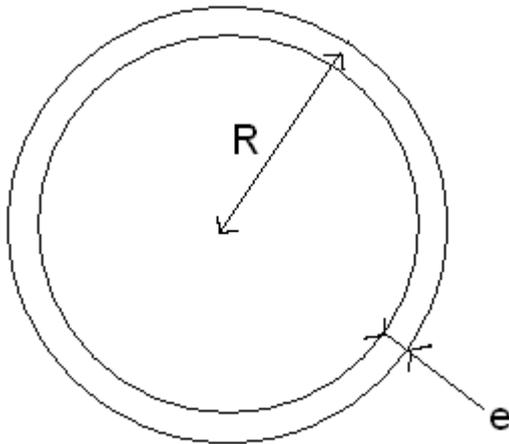
#### 15.1.1 Section pleine



#### 15.1.2 Tube épais



### 15.1.3 Tube mince

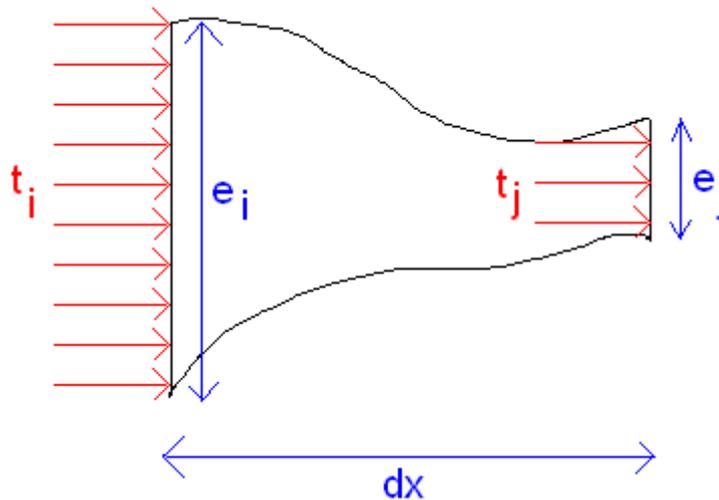


Contraintes tangentés :  $\tau_{xt} = \frac{-M_t \times R}{I_0}$

Avec  $I_0$  l'inertie polaire :  $I_0 = 2\pi R^3 e$

## 15.2 Profil mince fermé

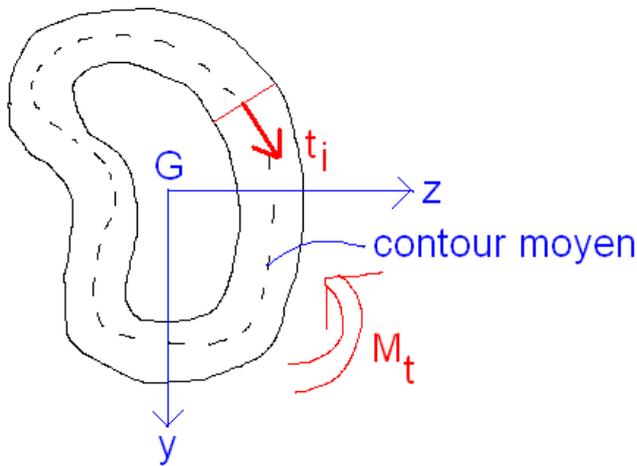
### 15.2.1 Propriété du flux du cisaillement



$$t_i \cdot e_i = t_j \cdot e_j$$

D'où :  $\forall i ; t_i \times e_i = \text{constante}$

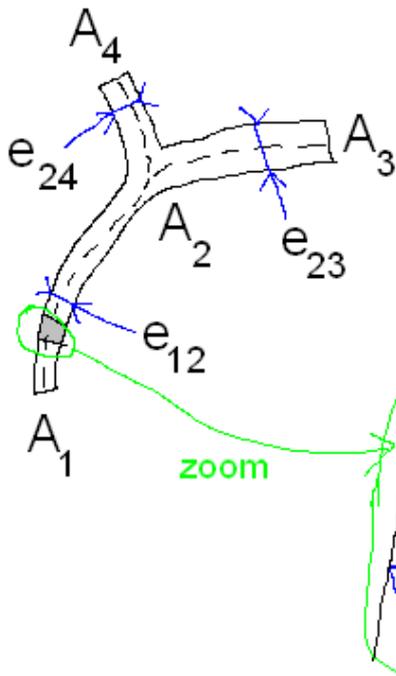
### 15.2.2 Calcul des contraintes dans un profil mince fermé



$$t_i = \frac{-M_t}{e_i \times 2\Sigma_{int}}$$

Avec  $\Sigma_{int}$  l'aire à l'intérieur du contour moyen.

### 15.3 Profil mince ouvert



$$t_{max,ij} = \frac{3M_t e_{ij}}{\sum_{\{i|j\}} e_{ij}^3 \times \overline{A_{ij}}}$$

Pour le zoom  $\left\{ \begin{array}{l} e_{ij} = e_{12} \\ \overline{A_{ij}} : \text{longueur du contour moyen entre } A_i \text{ et } A_j \end{array} \right.$

$$\Rightarrow t_{max,12} = \frac{3M_t e_{12}}{e_{12}^3 \times \overline{A_{12}} + e_{23}^3 \times \overline{A_{23}} + e_{24}^3 \times \overline{A_{24}}}$$

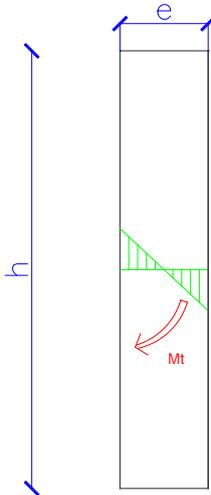
### 15.4 Section massive quelconque

Hors programme (Analogie de l'équilibre de la membrane)

## 15.5 Exercices

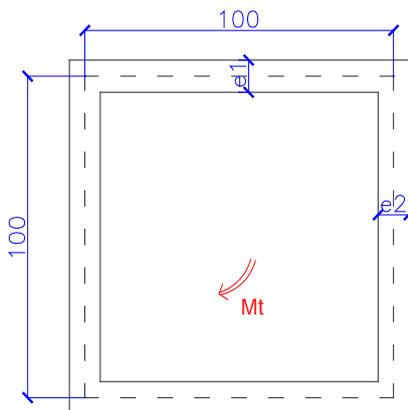
### Exercice [ 18 ]

Rectangle infiniment grand



Calculer la contrainte tangentielle maximale  $\tau_{\max}$  due au moment de torsion  $M_t$  en tenant compte que  $e \ll h$ .

### Exercice [ 19 ]

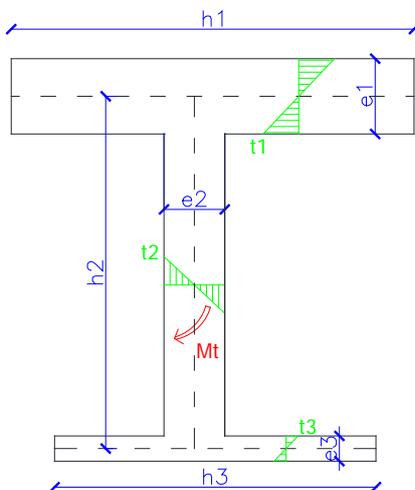


Données :  $e_1 = e_2 = 10$  mm,  $M_t = 50$  N.m

Les côtes de la section, en mm, sont :

- 1) Calculer la contrainte tangentielle maximale  $\tau_{\max}$  due au moment de torsion  $M_t$
- 2) Calculer la contrainte tangentielle maximale  $\tau_{\max}$  due au moment de torsion  $M_t$  avec  $e_2 = 5$  mm

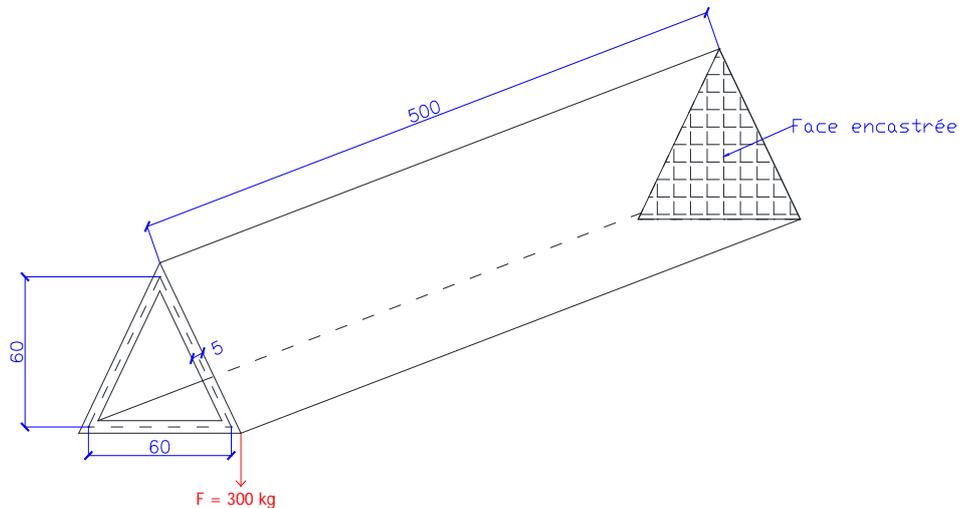
### Exercice [ 20 ]



Déterminer  $t_1$ ,  $t_2$  et  $t_3$  qui sont les contraintes tangentielles maximales dues au moment de torsion  $M_t$  dans les branches 1, 2 et 3 de la section suivante :

### Exercice [ 21 ]

Les côtes de la poutre sont en cm :



Données :

- Pour un triangle plein de hauteur  $h$  et de base  $b$ , l'inertie est :  $I_z = \frac{bh^3}{36}$
- Les axes sont pris selon la convention de la RDM

Pour la section centrale ( $x = 2,5 \text{ m}$ ), calculer :

- les contraintes normales
- les contraintes tangentielles de torsion

### Exercice [ 22 ]

Deux arbres cylindriques de section constante sont sollicités en torsion pure par le même couple de torsion.

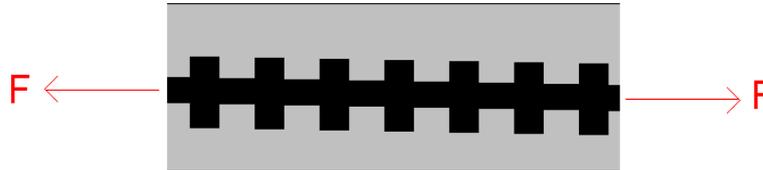
- Le premier arbre est plein de diamètre  $D_1$
- Le deuxième arbre est tubulaire de diamètre extérieur  $D_2$  et de diamètre intérieur  $0,7D_2$ .

La contrainte maximale de torsion est la même pour chacun de ces deux arbres.

En sachant qu'ils sont de même longueur et fabriqués dans le même matériau, quel est le rapport de masse entre les deux arbres ?

## 16. Principe de la précontrainte

### 16.1 Généralités



Précontrainte = compression ajoutée dans le matériau (précontrainte interne) ou extérieure à la section (cas de réhabilitation de pont ou de bâtiment par exemple).

Remarque : l'objectif de ce chapitre n'est pas de faire un cours sur la précontrainte, mais uniquement de savoir calculer les contraintes normales induites.

### 16.2 Modélisation

#### 16.2.1 Nature de la force considérée

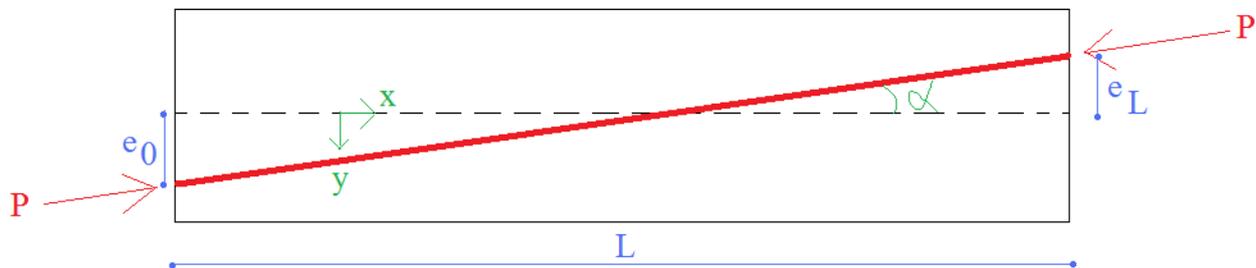
Il est commode de considérer la force interne à la section et de réaliser l'équilibre

#### 16.2.2 Exemple

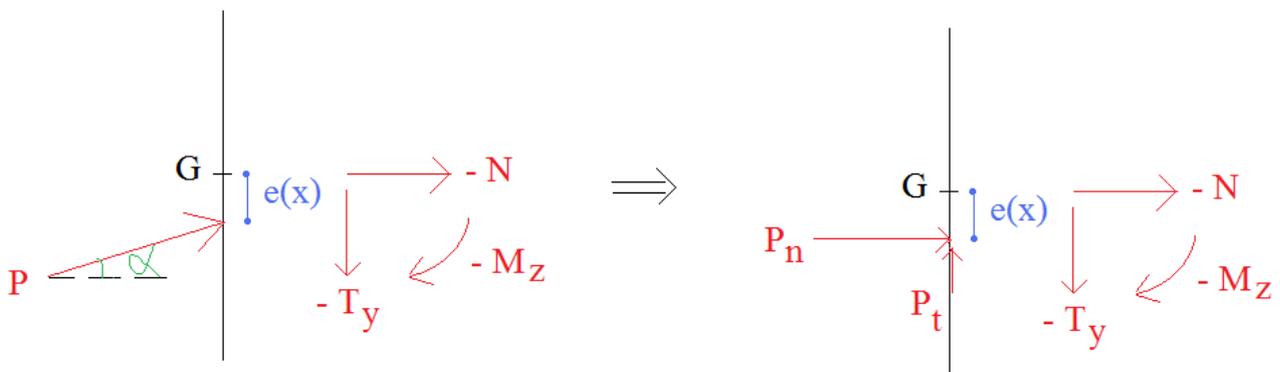
On considère un câble avec une force de précontrainte  $P$  faisant un angle  $\alpha$  par rapport à la fibre moyenne.

L'excentricité du câble à l'origine vaut  $e_0$  et l'excentricité à l'extrémité vaut  $e_L$ .

ATTENTION : l'excentricité a un signe, dans l'exemple  $e_0 > 0$  et  $e_L < 0$  (puisque l'axe  $\vec{y}$  du repère local est dirigé vers le bas).



A une abscisse  $x$  donnée, l'équilibre de la section est modélisée par :



L'excentrement  $e(x)$  est une fonction affine de type  $a \cdot x + b$  avec :

$$\begin{cases} e(0) = e_0 = a \cdot 0 + b \\ e(L) = e_L = a \cdot L + b \end{cases}$$

Ainsi, l'excentrement en fonction de  $x$  vaut :

$$e(x) = \frac{e_L - e_0}{L} \cdot x + e_0$$

L'angle  $\alpha$  peut être calculé par :

$$\tan \alpha = \frac{e_L - e_0}{L}$$

Attention : l'excentricité a un signe qu'il convient de respecter.

$P_n$  et  $P_t$  sont les composantes de  $P$  selon les axes  $\vec{x}$  et  $\vec{y}$  et valent :

$$\begin{cases} P_n = P \cdot \cos \alpha \\ P_t = P \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Ce travail préliminaire réalisé, il reste à calculer l'équilibre pour connaître le torseur induit de la précontrainte :

Equilibre selon l'axe  $\vec{x}$  :

$$-N + P_n = 0 \Leftrightarrow N = P_n$$

Equilibre selon l'axe  $\vec{y}$  :

$$-T_y - P_t = 0 \Leftrightarrow T_y = -P_t$$

Equilibre du moment autour de l'axe  $\vec{z}$  :

$$-M_z - e(x) \cdot P_n = 0 \Leftrightarrow M_z = -e(x) \cdot P_n$$

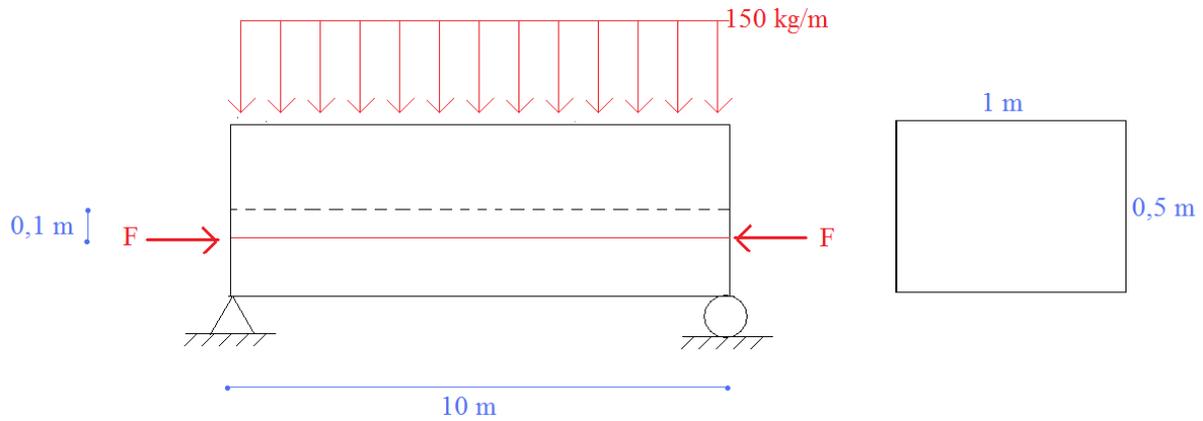
Puis la répartition des contraintes normales se calcule avec le torseur suivant :

$$\begin{cases} N = P_n \\ M_z = -e(x) \cdot P_n \end{cases}$$

Et la répartition des contraintes tangentes se calcule avec l'effort tranchant  $T_y = -P_t$

### 16.3 Exercice

#### Exercice [ 23 ]



Dimensionner la précontrainte  $F$  à appliquer à la poutre pour éviter toute traction dans la poutre.