

Cours 2ème année ENTPE Résistance des matériaux

Boris TEDOLDI
Ingénieur structure



Calcul Structure Bâtiment

<http://www.csb.bet>

Sommaire

0. Objet du cours et conventions de signe.....	3
1. Brefs rappels de RDM 1^{ère} année.....	6
2. Moments et efforts tranchant entre deux sections d'une poutre droite dont les moments sont connus.....	47
3. Calcul d'une flèche	58
4. Méthode des forces	71
5. Méthode des trois moments	104
6. Méthode des déplacements	151
7. Méthode des rotations	173
8. Introduction aux éléments finis pour les poutres à 3 degrés de liberté	182
9. Exemple	189

0. Objet du cours et conventions de signe

0.1 Objet du cours

L'objet du cours de RDM en première année concernait la théorie des poutres (poutres isostatiques).

Le cours de RDM 2 concerne les systèmes de poutres hyperstatiques (en s'appuyant parfois sur les résultats des poutres isostatiques).

0.2 Convention de signes

	Signe positif	Signe négatif
Effort normal N	Engendre de la traction supplémentaire	Engendre de la compression supplémentaire
Moment M_z pour les problèmes 2D	La fibre supérieure est l'ensemble des points où σ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue). La fibre inférieure est l'ensemble des points où σ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée).	La fibre supérieure est l'ensemble des points où σ est maximale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus tendue ou la moins comprimée). La fibre inférieure est l'ensemble des points où σ est minimale (c'est-à-dire que c'est la zone la plus comprimée ou la moins tendue).

Remarque :

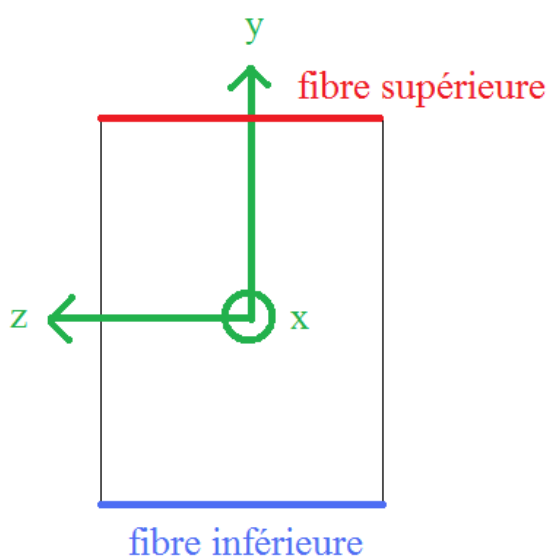
Les signes utilisés dans ce cours ne sont qu'une convention. Elle n'importe peu, tant que la réalité physique (zones en compression et en traction) est comprise de la même manière entre le calculateur et le lecteur d'une note de calculs.

Néanmoins, une fois une convention choisie, il convient de toujours la respecter.

0.3 Notations de l'effort tranchant

Dans ce présent cours, l'effort tranchant est noté indifféremment T (notation française) ou V (notation adoptée pour les codes génie civil internationaux).

0.4 Représentation du repère local



Définitions des fibres inférieures et supérieures

Fibre supérieure : fibre telle que les ordonnées y sont **maximales**.

Fibre inférieure : fibre telle que les ordonnées y sont **minimales**.

ATTENTION, le sens du vecteur y est dirigé vers le haut, contrairement au cours de RDM de première année.

Voir les différences sur le calculs des diagrammes de sollicitations par rapport aux calculs de 1^{ère} année dans les rappels de cours.

0.5 Hypothèses valables pour l'ensemble du cours

- Problème plan (structure plane dont le chargement est dans son plan)
- Hypothèses des transformations infinitésimales :
 - o Petits déplacements
 - o Petites déformations
- Domaine élastique et linéaire du matériau
- Hypothèses sur la loi de comportement
 - o Élastique
 - o Linéaire
 - o Homogène
 - o Isotrope
- La contrainte de cisaillement selon y est égale en tout point de même ordonnée y.
- Domaine de validité de la théorie des poutres
 - o Les dimensions transversales doivent être petites par rapport aux dimensions longitudinales. $\frac{1}{40} < \frac{h}{\ell} < \frac{1}{5}$
 - o La section doit être suffisamment massive : $b < h < 10b$
 - o Pas de variation brusque de dimensions transversales
 - o Pas de variation brusque de courbure R supérieur à 5h
- Principe de Bernoulli : après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne.
- Principe de Saint Venant : Les contraintes (et par suite les déformations) dans une section droite, éloignée des points d'application des efforts extérieurs et des singularités, ne dépendent que de la résultante et du moment résultant des efforts appliqués à l'une des deux parties séparée par la section droite envisagée

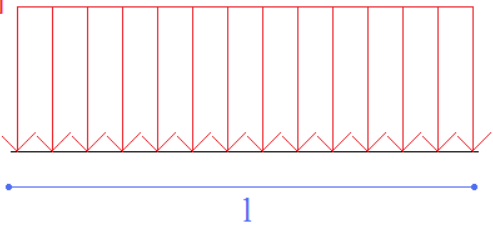
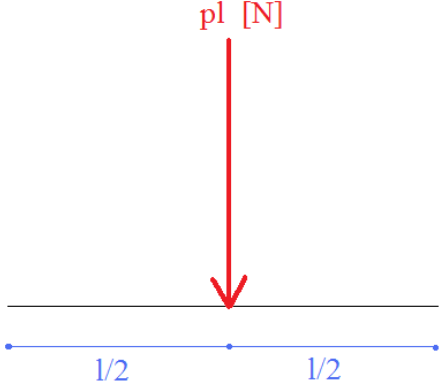
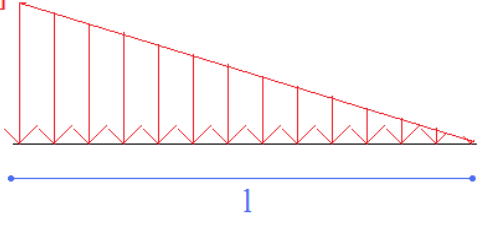
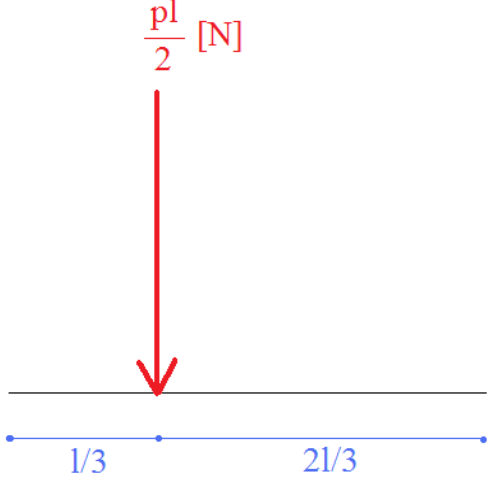
1. Brefs rappels de RDM 1^{ère} année

1.1 Calculs des réactions d'appuis

1.1.1 Force globalement équivalente à une force répartie

Propriété

Une force globalement équivalente à une force répartie est une force ponctuelle égale à la résultante des forces répartie, dont le moment par rapport à un point est le même que celui des forces réparties.

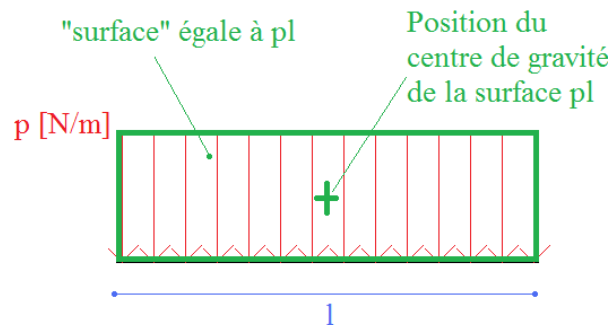
Force répartie	Force globalement équivalente
Force répartie rectangulaire (ou uniformément) p [N/m] 	pl [N] 
Force répartie triangulaire p [N/m] 	$\frac{pl}{2}$ [N] 



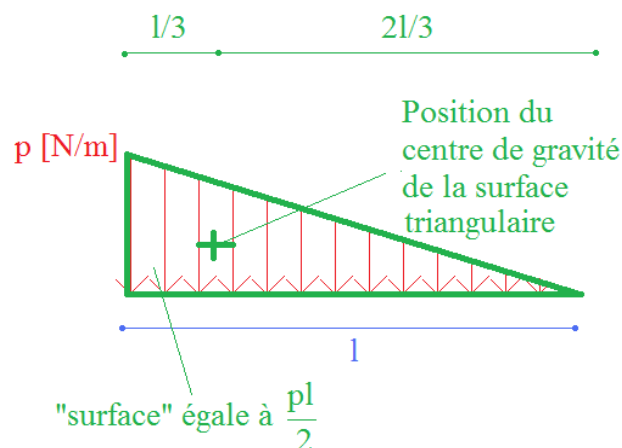
Le tableau précédent est à connaître par cœur ! Car il est très souvent utilisé pour résoudre des problèmes de RDM.

Néanmoins, il est facile de retrouver ces résultats puisque la force ponctuelle est égale à la *surface équivalente* et est située au niveau du centre de gravité de cette même *surface*.

Exemple force rectangulaire répartie



Exemple : force répartie triangulaire



1.1.2 Liaisons

Définition d'une étude cinématique

Une étude cinématique est l'étude d'une liaison entre deux solides S_1 et S_2 en étudiant les mouvements possibles entre ces deux solides.



Il s'agit bien de mouvements possibles et non réels, étant entendu qu'en génie civil, les solides ne sont (généralement) pas en mouvement par rapport à d'autres (exception des calculs dynamique qui ne font pas l'objet de ce cours).

Propriété

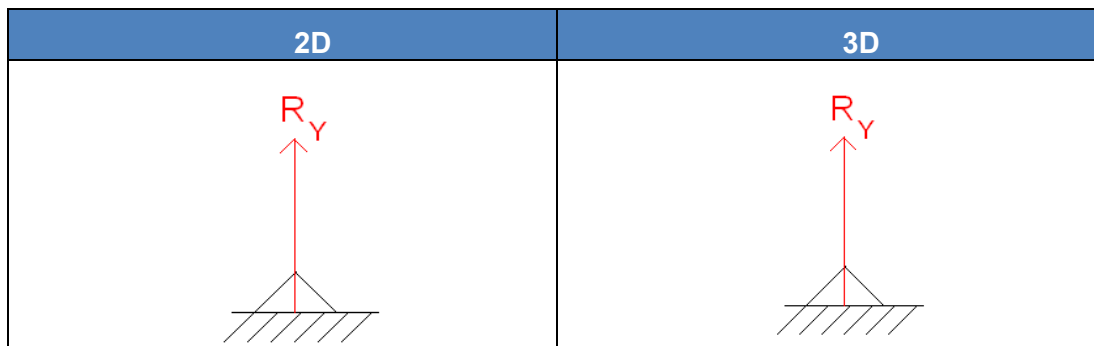
Lorsqu'un degré de liberté est bloqué par la liaison, il existe nécessairement une action mécanique appelée action ou effort de liaison dans la direction du degré de liberté bloqué.

Remarque : Les symboles présentés suivants ne sont pas normalisés mais couramment rencontrés.

1.1.2.1 Appui simple

Cinématique : une translation (axe x ou y) et une rotation autorisée.

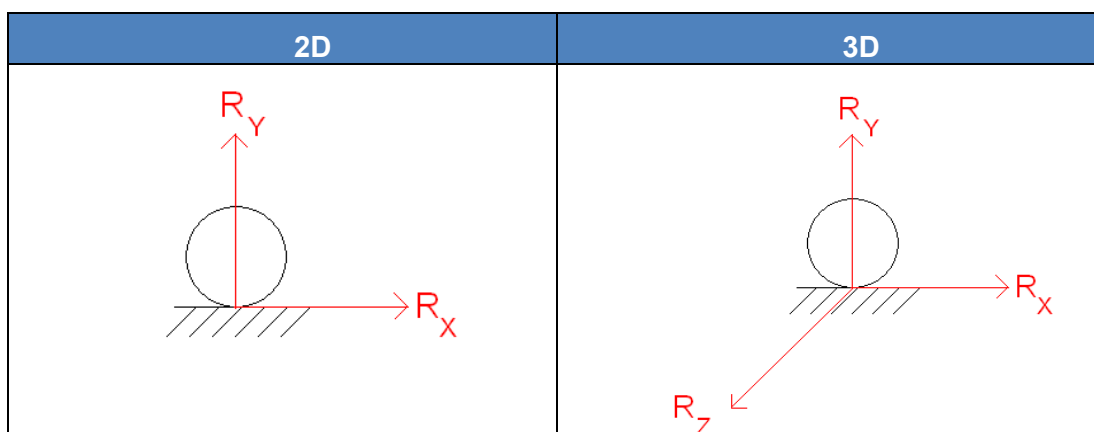
⇒ Réactions d'appuis : force selon la direction dont le déplacement est empêché.



1.1.2.2 Articulation

Cinématique : une rotation autorisée.

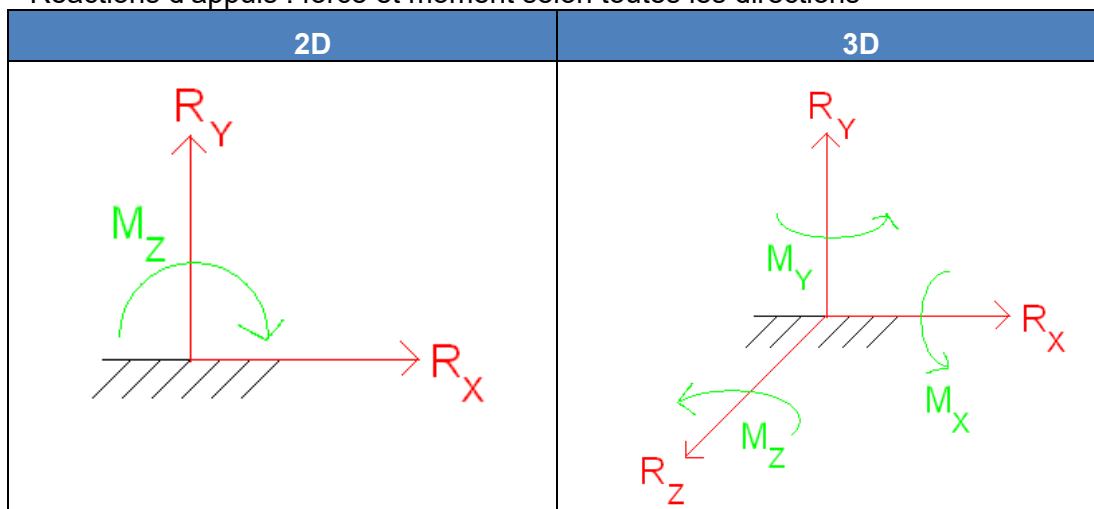
⇒ Réactions d'appuis : force selon toutes les directions



1.1.2.3 Encastrement

Cinématique : aucun mouvement possible.

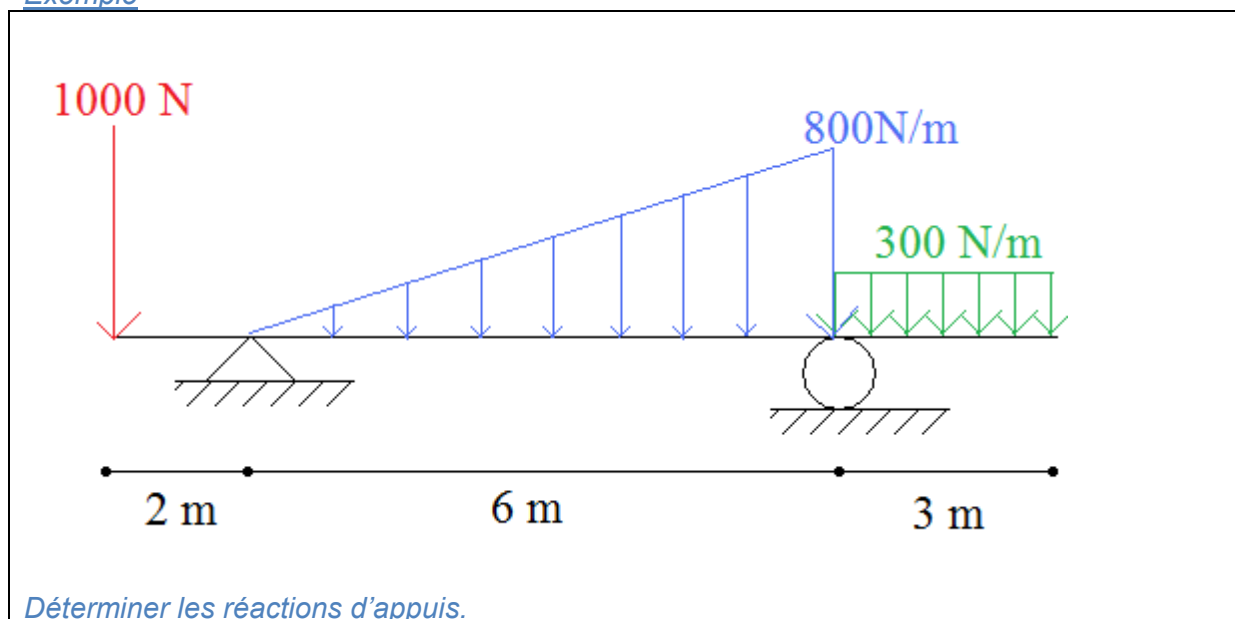
⇒ Réactions d'appuis : force et moment selon toutes les directions



1.1.3 Méthode

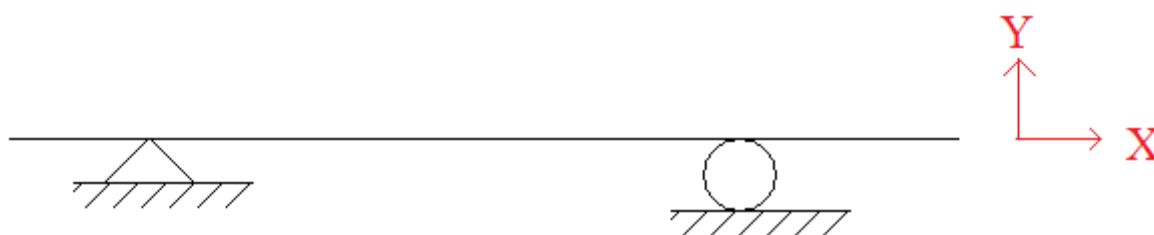
* dans la pratique, il est possible de calculer un moment pour n'importe quel point de la structure si le calcul du moment conserve la partie droite et la partie gauche. En effet, en statique, ce moment global est nécessairement nul.

Exemple



Solution

Mise en place d'un repère global



Remarque : la convention y dirigé vers le bas est une convention du repère local et non global.

Dessiner et écrire les réactions d'appuis

Au niveau de l'appui simple, il n'existe qu'une seule réaction verticale en force.

Au niveau de la rotule, il existe une réaction verticale et une réaction horizontale.



Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

Charge répartie rectangulaire :

Elle vaut 300N/m et sollicite 3 m, donc la charge ponctuelle équivalente vaut : $300 \times 3 = 900 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au centre du rectangle et donc à 1,5 m à droite de l'appui rotule.

Charge répartie triangulaire :

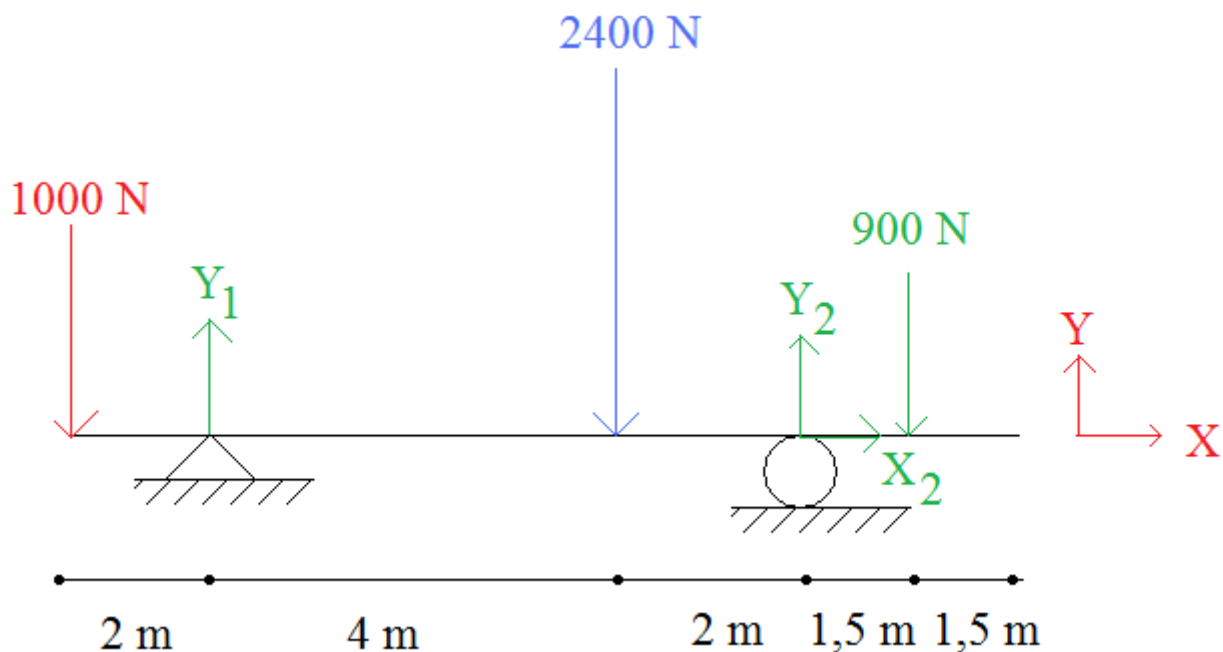
Elle vaut au maximum 800N/m et sollicite 6 m, donc la charge ponctuelle vaut : $800 \times \frac{6}{2} = 2400 \text{ N}$

La position de la charge ponctuelle équivalente est placée au centre de gravité de la charge répartie, c'est-à-dire qu'elle est placée au $\frac{2}{3}$ de la pointe du triangle : à 4 m à droite de l'appui simple (et donc à 2 m à gauche de l'appui rotule).



il ne faut pas oublier les charges qui sont déjà ponctuelles dans le problème.

Il vient alors :



Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulles : $X_2 = 0$

Somme des forces verticales nulles : $Y_1 + Y_2 - 1000 - 2400 - 900 = 0$

$$\Leftrightarrow Y_1 + Y_2 - 4300 = 0$$

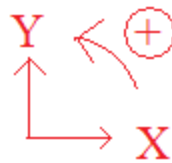
Calcul d'un moment global pour obtenir une équation supplémentaire

Il y a 3 inconnues et 2 équations. Cette étape est donc obligatoire pour résoudre le système.

Pour éliminer Y_1 de cette équation, le moment global au niveau de l'appui 1 est calculé. Le moment global (en tenant compte de la partie droite et la partie gauche) au niveau de cet appui est nul.

Rappel :

- le moment en valeur absolue vaut la force multipliée par le bras de levier.
 - Le signe est fonction du sens dans lequel fait tourner la force considérée
- Le signe positif est dans le sens suivant :

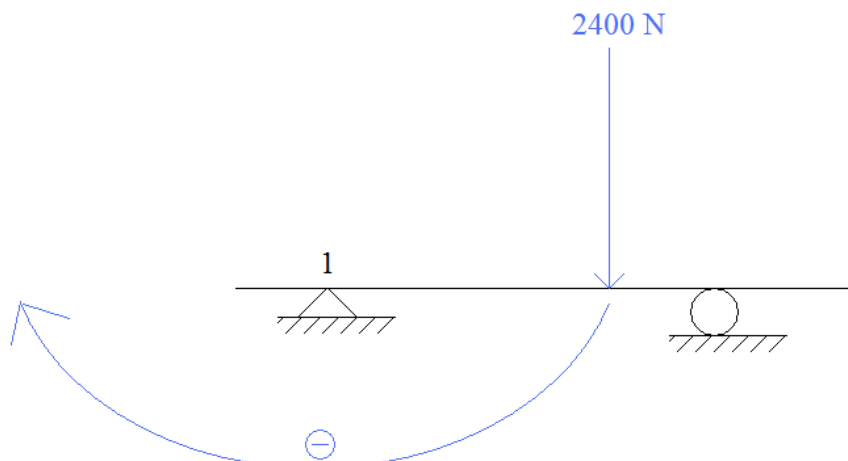


Exemple :

La force de 1000 N fait tourner dans le sens positif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 2 m.



La force de 2400 N fait tourner dans le sens négatif le nœud au niveau de l'appui 1 avec un bras de levier de 4 m.



En procédant de même pour les autres forces, on obtient :

$$1000 \times 2 - 2400 \times 4 + Y_2 \times 6 - 900 \times (6 + 1,5) = 0$$

$$\Leftrightarrow Y_2 \approx 2392 \text{ N}$$

Remarque :

Il aurait tout à fait été possible de prendre en compte que le moment était nul au niveau de l'appui rotule. Ou encore au niveau des deux extrémités libres. Le résultat final aurait été (heureusement...) identique.

Résolution du système

$$\begin{cases} Y_1 + Y_2 - 4300 = 0 \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Y_1 \approx 1908 \text{ N} \\ Y_2 \approx 2392 \text{ N} \\ X_2 = 0 \text{ N} \end{cases}}$$

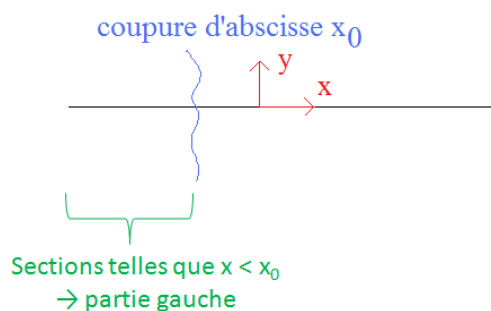
1.2 Calculs des diagrammes de sollicitations par la méthode des coupures

1.2.1 Définitions des parties droite et gauche

Définition de la partie gauche

La partie gauche d'une coupure est constituée des sections d'abscisses inférieures à l'abscisse de la coupure

Exemple :



il faut être vigilant sur le sens du vecteur x du repère local, car s'il est orienté vers la gauche, la partie gauche peut être géographiquement... à droite comme l'illustre la figure suivante :

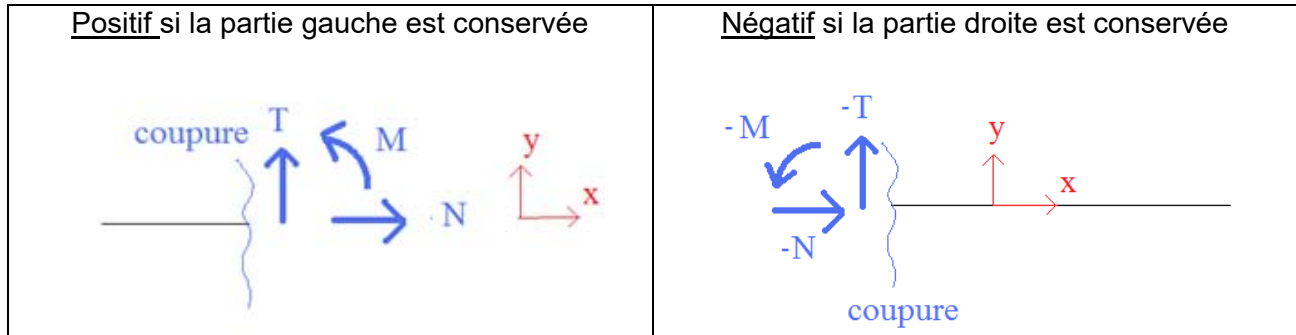
Définition de la partie droite

La partie droite d'une coupure est constituée des sections d'abscisses supérieures à l'abscisse de la coupure.

Exemple :

1.2.2 Méthodes : dessiner les torseurs en fonction du choix de conserver la partie droite ou la partie gauche

Il convient de dessiner les vecteurs avec le même sens que le repère local puis d'écrire le torseur N, T (ou V) et M avec un signe :



Pour se souvenir du sens de la flèche courbe représentant le moment

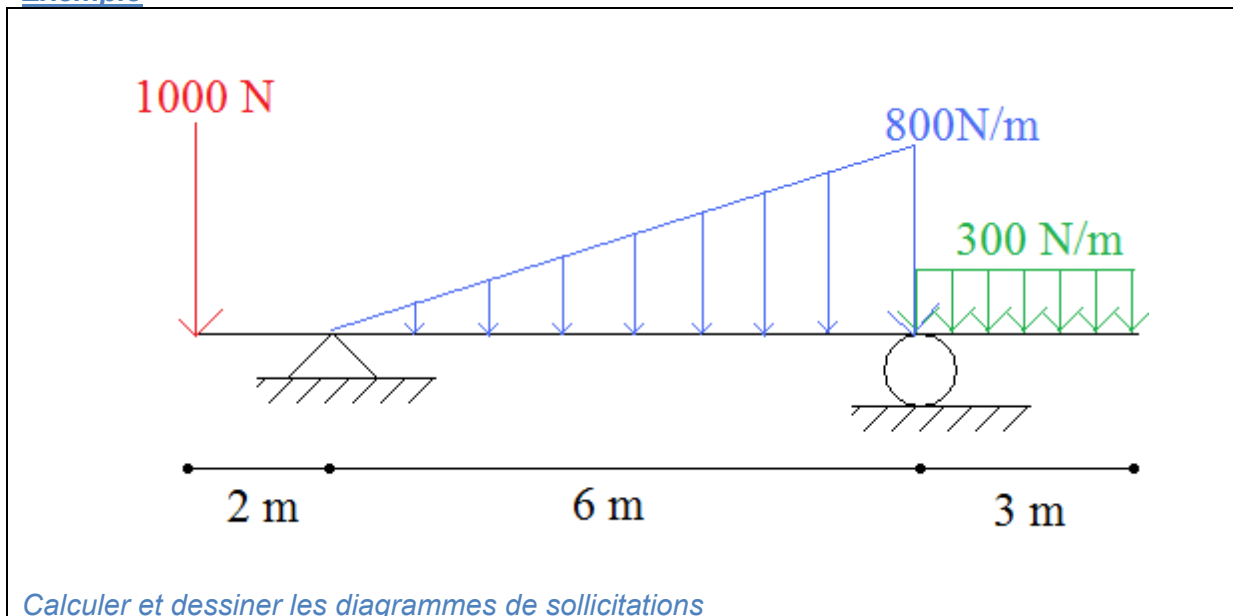
La flèche courbe « *part* » du vecteur x en direction du vecteur y.

1.2.3 Logigramme

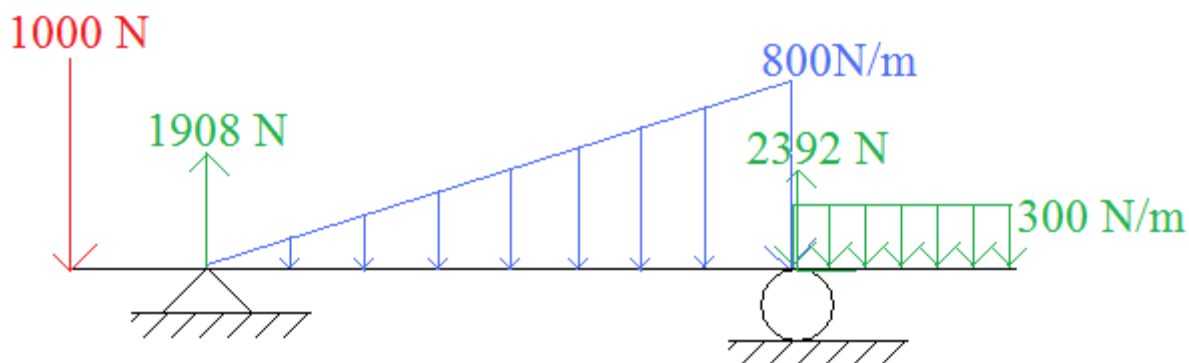
Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.

Remarque : cette étape peut être évitée uniquement dans le cas où le diagramme de sollicitation est souhaité pour une barre d'extrémité libre puisqu'il suffit de conserver après coupure la partie de structure ne comprenant pas d'appuis.

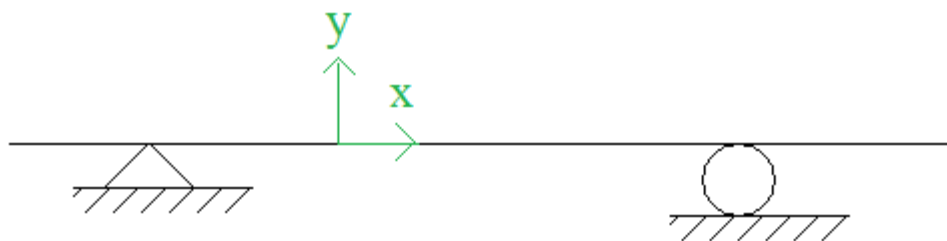
Exemple



Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis, a été effectué à l'exemple du chapitre précédent et n'est pas rappelé *ici* :

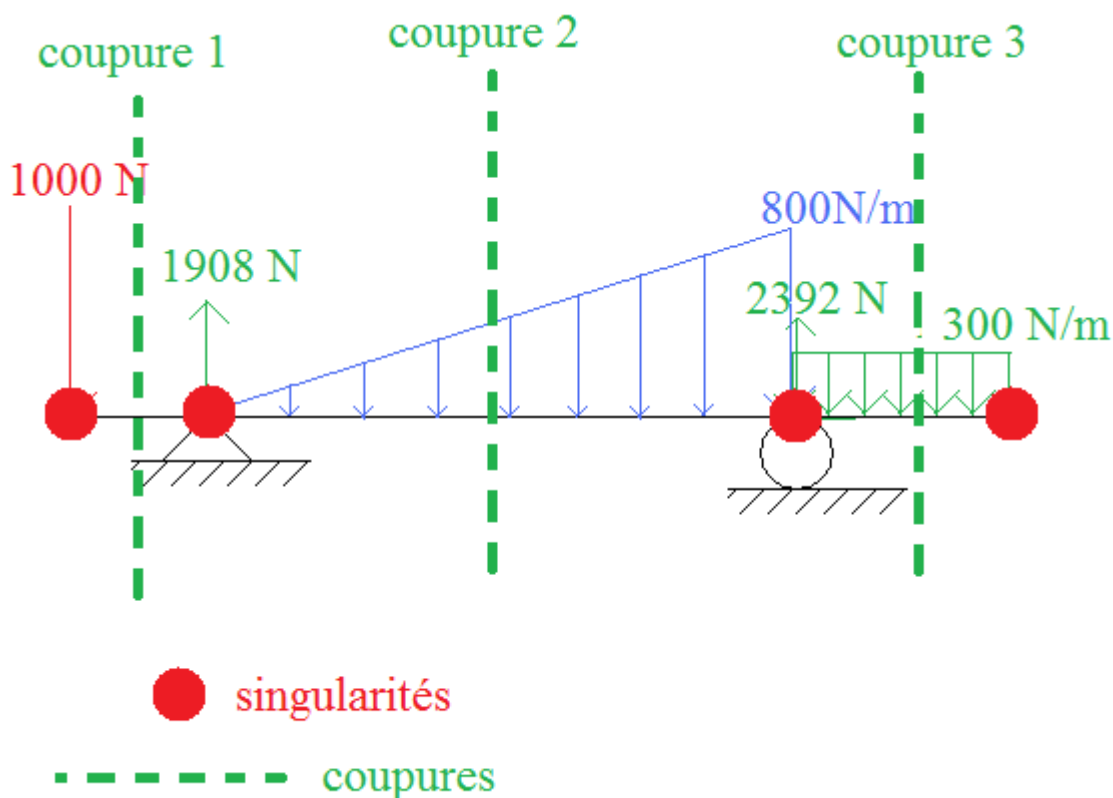


Mettre en place un repère local sur chaque poutre de la structure



Effectuer une coupure entre chaque singularité

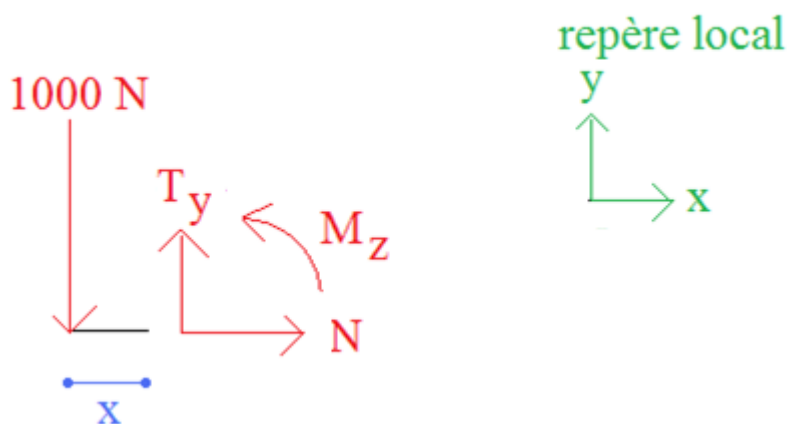
3 coupures sont ainsi à réaliser.



Coupure 1 (tronçon à gauche de l'appui simple)

Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur

La partie gauche est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche :



Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente

Etape inutile puisqu'il n'y a pas de force répartie

Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulle :

$$-N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$-1000 + T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 1000$$

Moment au niveau de la coupure nul :

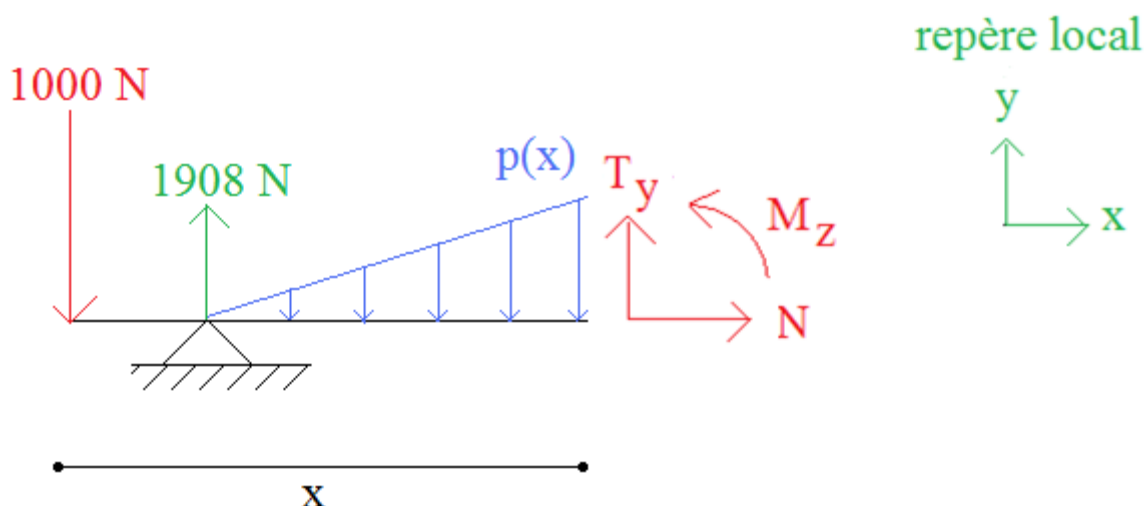
$$1000 \cdot x + M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -1000 \cdot x$$

Remarque : pour la coupure 1, il est à noter que les réactions d'appuis étaient inutiles à connaître.

Coupe 2 (tronçon entre les appuis simple et rotule)

Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur

La partie gauche est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche :



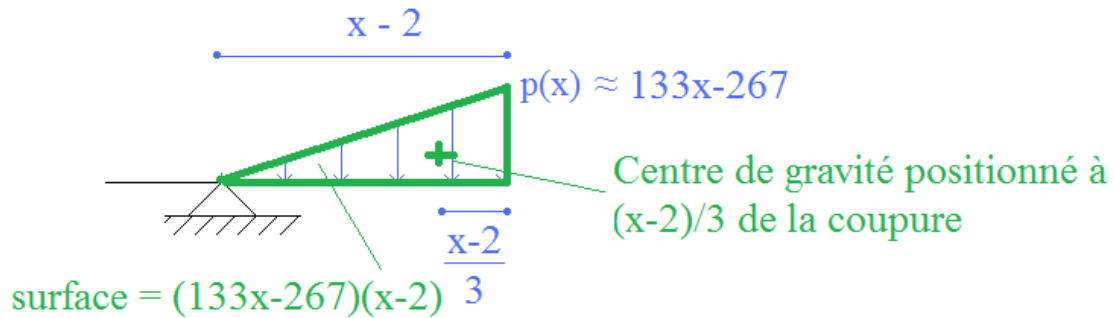
Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente

Pour déterminer la force répartie équivalente, il convient de connaître $p(x)$.

$p(x)$ est une fonction affine de la forme $a \cdot x + b$

$$\text{avec : } \begin{cases} p(x = 2 \text{ m}) = 0 \\ p(x = 8 \text{ m}) = 800 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 0 \\ 8a + b = 800 \end{cases} \Leftrightarrow p(x) \approx 133x - 267$$

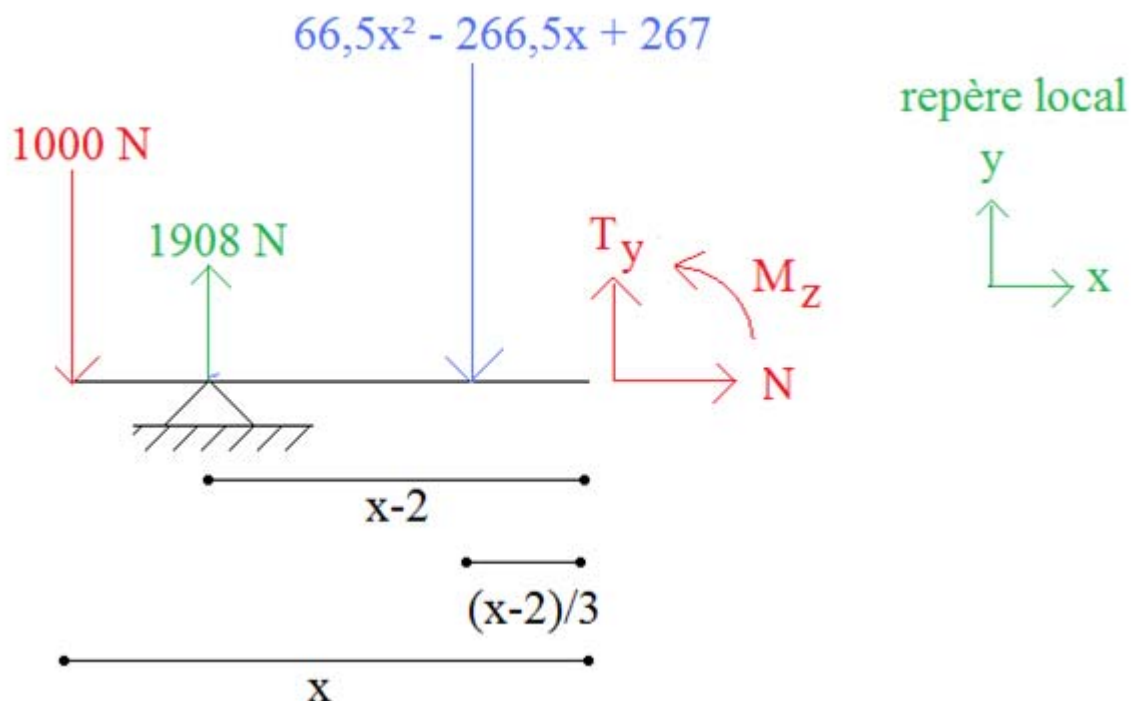
En isolant la force répartie triangulaire :



La charge triangulaire est répartie sur une longueur de $(x-2)$ mètres donc la force équivalente vaut :

$$(133x - 267) \cdot \frac{x-2}{2} = 66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x + 267$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du triangle, donc à $\frac{2}{3} \cdot (x-2)$ à droite de l'appui simple (ou à $\frac{1}{3} \cdot (x-2)$ à gauche de la coupure)



Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulle :

$$N = 0$$

Somme des forces verticale nulle :

$$-1000 + 1908 - 66,5 \cdot x^2 + 265,5 \cdot x - 267 + T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x - 641$$

Moment au niveau de la coupure nul :

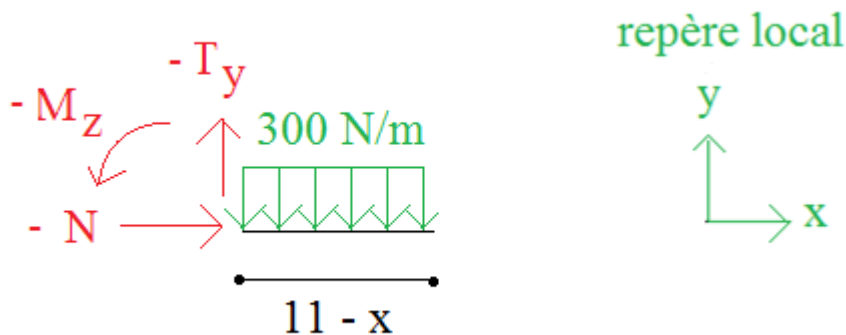
$$1000 \cdot x - 1908 \cdot (x - 2) + (66,5 \cdot x^2 - 265,5 \cdot x + 267) \cdot \frac{x - 2}{3} + M_z = 0$$

$$\Leftrightarrow M_z \approx -22,2 \cdot x^3 + 132,8 \cdot x^2 + 642 \cdot x - 3638$$

Coupure 3 (tronçon à droite de l'appui rotule)

Conserver la partie droite ou la partie gauche et dessiner le torseur

La partie droite est conservée. La section considérée se situe à « x mètres » de l'extrémité gauche. C'est-à-dire à « 11 - x mètres » de l'extrémité droite :

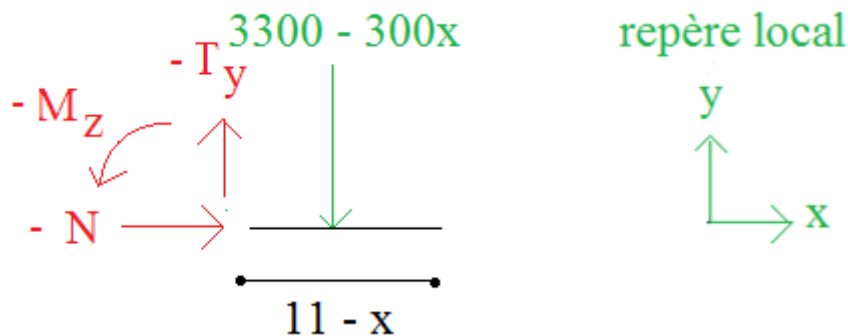


Remplacer toutes les forces réparties de la partie de structure conservée par une force ponctuelle globalement équivalente

La charge rectangulaire est répartie sur une longueur de (11-x) m donc la force équivalente vaut :

$$300 \cdot (11 - x) = 3300 - 300 \cdot x$$

La position de la force ponctuelle globalement équivalente se situe au niveau du centre de gravité du rectangle, donc à $\frac{11-x}{2} = 5,5 - 0,5 \cdot x$ à droite de la coupure.



Ecrire les équations d'équilibre du système

Somme des forces horizontales nulle : $-N = 0 \Leftrightarrow N = 0$

Somme des forces verticale nulle :

$$-3300 + 300x - T_y = 0 \Leftrightarrow T_y = 300x - 3300$$

Moment au niveau de la coupure nul :

$$-(3300 - 300x) \times (5,5 - 0,5x) - M_z = 0 \Leftrightarrow M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

Remarque : pour la coupure 3, il est à noter que les réactions d'appuis étaient inutiles à connaître.

Vérification

Cette étape est facultative mais est conseillée.

Tronçon 1 :

$$T_y = 1000$$

$$M_z = -1000 \cdot x$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 2 :

$$T_y = 66,5x^2 - 265,5x - 641$$

$$\Leftrightarrow M_z \approx -22,2x^3 + 132,8x^2 + 642x - 3638$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

Tronçon 3 :

$$T_y = 300x - 3300$$

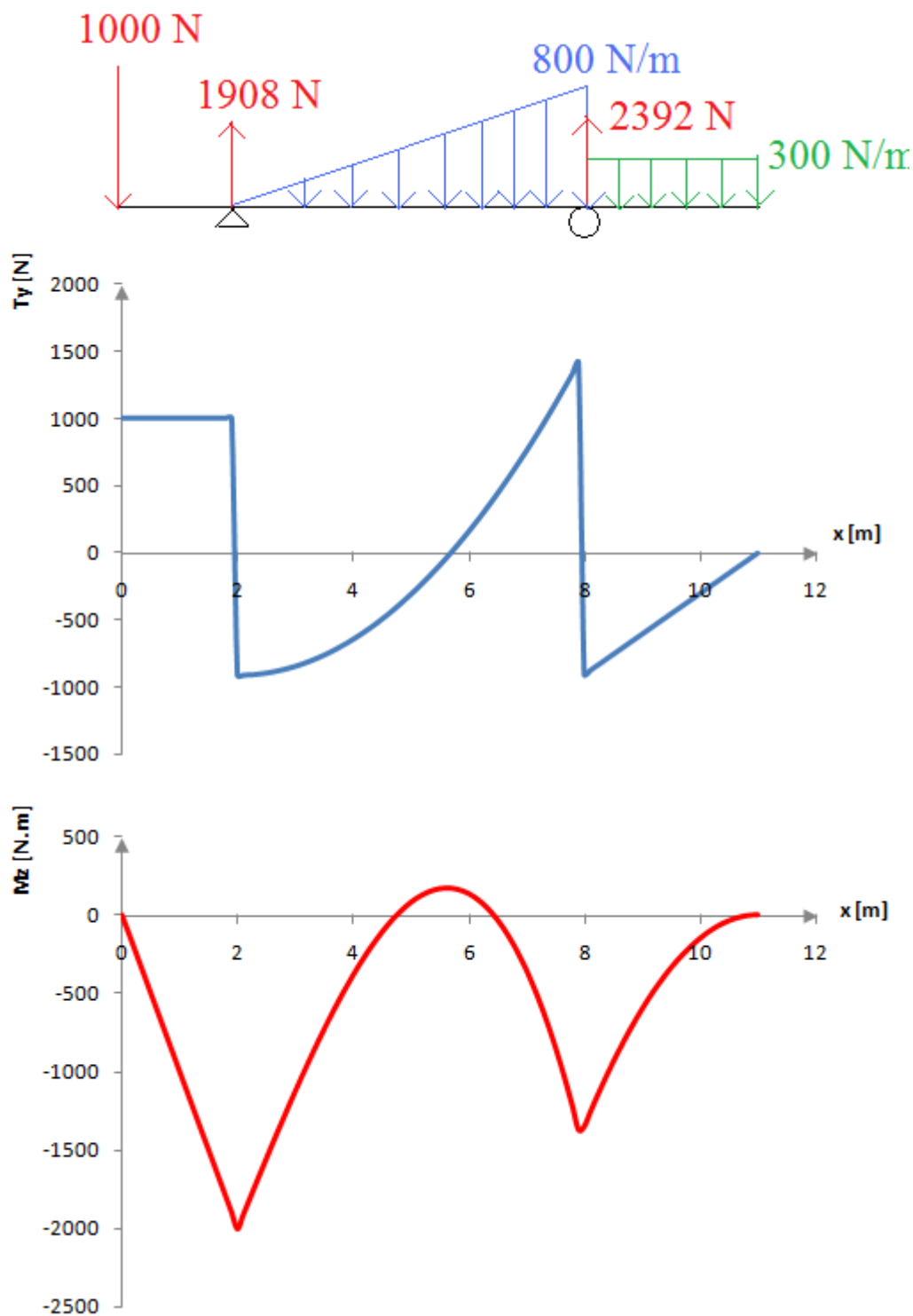
$$M_z = -150x^2 + 3300x - 18150$$

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \text{ est vérifié.}$$

$$\frac{dT_y}{dx} = p = 300 \text{ N/m est vérifié.}$$

Tracer les diagrammes de sollicitations

L'effort normal est nul en tout point. Il est donc inutile de tracer ce diagramme.



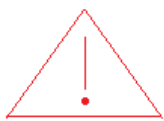
1.3 Tracé direct des diagrammes de sollicitations

1.3.1 Relations à connaître

Dans le cas de poutres droites et dans des problèmes plans.

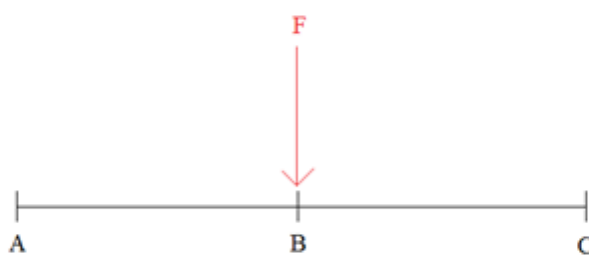
$$\begin{cases} \frac{dV}{dx} = p \\ \frac{dM}{dx} = -V \end{cases}$$

$$M(x_2) = M(x_1) - \int_{x_1}^{x_2} V(x) dx$$



ces relations sont valables pour des poutres droites. Pour des poutres courbes, ces relations ne sont plus correctes car il serait nécessaire d'utiliser d'autres types de repérage (par exemple : coordonnées polaires pour une poutre de fibre moyenne circulaire).

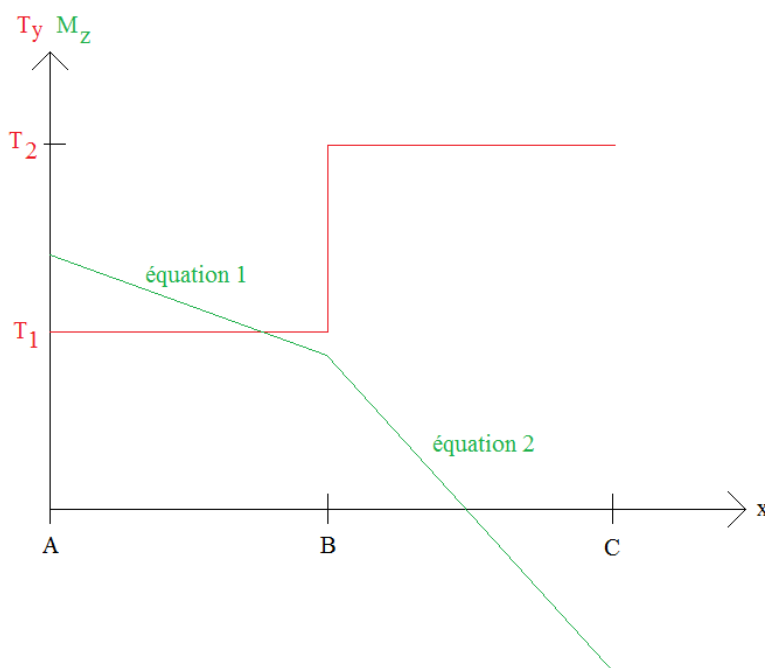
1.3.2 Effet d'une force ponctuelle (selon la direction contraire de y)



repère local



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



Points remarquables au niveau du point B :

Saut d'effort tranchant égal à F, c'est-à-dire que : $T_2 - T_1 = F$

L'équation 1 est de la forme :

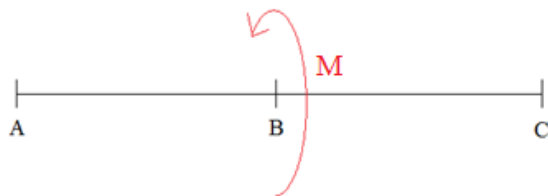
$$M_z(x) = -T_1 \times x + a$$

L'équation 2 est de la forme :

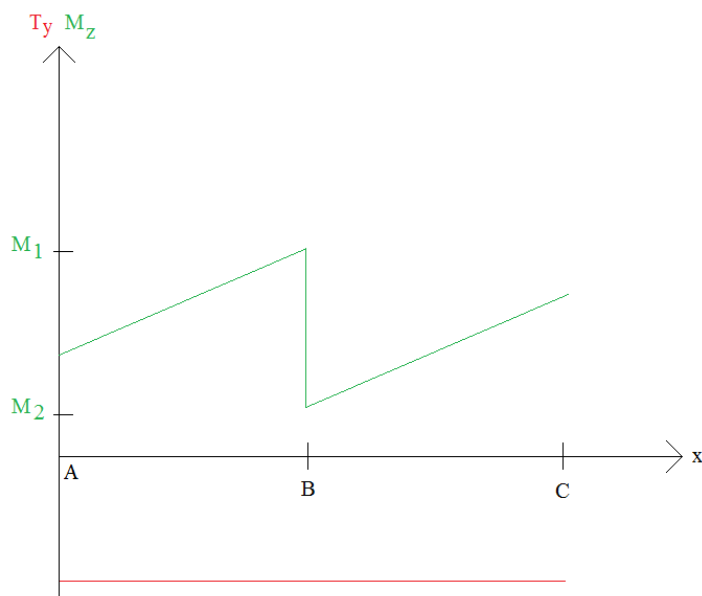
$$M_z(x) = -T_2 \times x + b$$

La différence de pente entre la partie 1 et la partie 2 est : $T_1 - T_2 = -F$

1.3.3 Effet d'un moment ponctuel autour de z



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



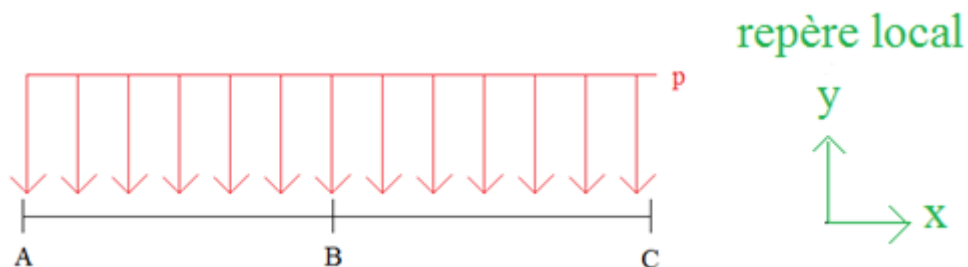
Points remarquables au niveau du point B :

Aucun effet sur l'effort tranchant

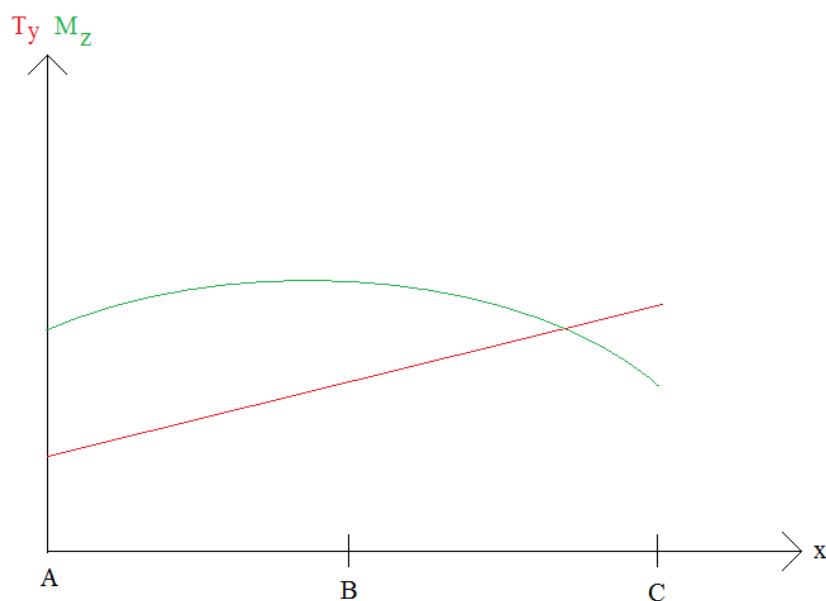
Aucun effet sur la pente à droite ou à gauche du diagramme du moment fléchissant

Saut de moment fléchissant égal à $-M$, c'est-à-dire que : $M_2 - M_1 = -M$

1.4.1 Effet d'une charge répartie (selon la direction contraire de y)



Les diagrammes d'effort tranchant et de moment fléchissant sont :



Points remarquables

La pente du diagramme de l'effort tranchant est égale à p , c'est-à-dire que son équation est de la forme :

$$T_y(x) = p \times x + a$$

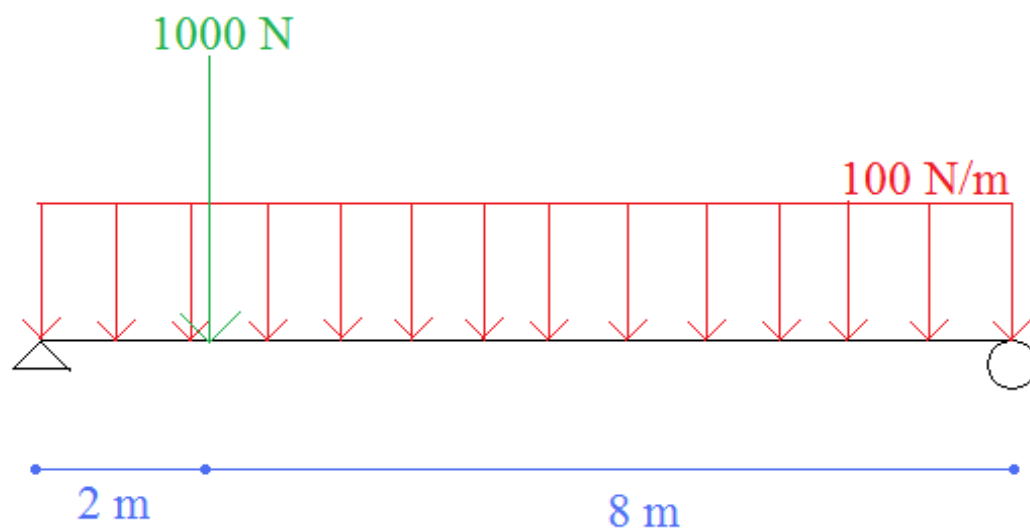
Le diagramme du moment fléchissant est une parabole de la forme :

$$M_z(x) = -\frac{p \times x^2}{2} - a \times x + b$$

1.4.2 Méthode

Travail préalable : déterminer les réactions d'appuis.

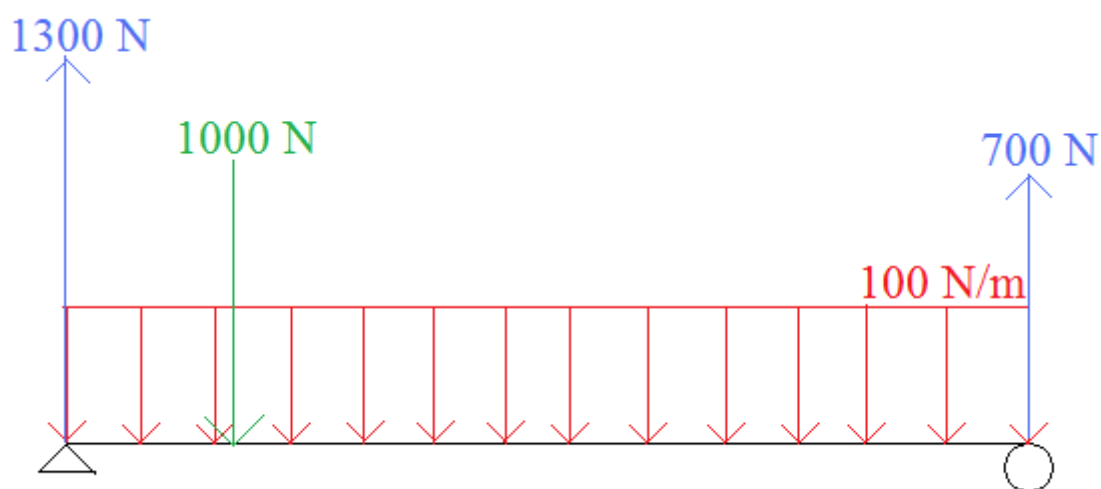
Exemple



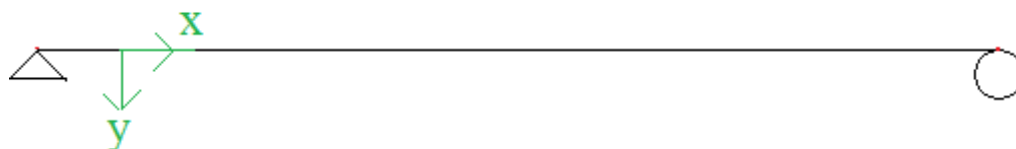
Dessiner les diagrammes de sollicitations

Solution

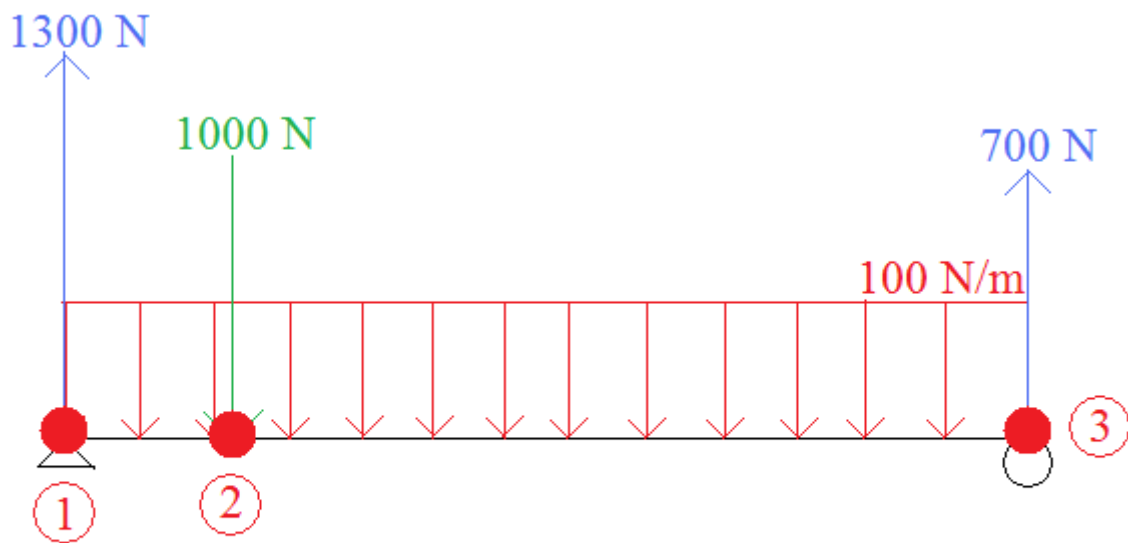
Le travail préalable, qui consiste à déterminer les réactions d'appuis (non l'objet de ce chapitre) donne le résultat suivant :



Choisir un repère local



Balayer la structure des x les plus petits aux plus grands et trouver toutes les singularités



● singularité

Déterminer l'effort tranchant du point le plus à gauche

En dehors de la structure, il est considéré (artificiellement) que l'effort tranchant est nul.

Ainsi, infiniment proche à droite du point le plus à gauche (qui correspond donc à la singularité 1), on a une force ponctuelle égale à 1300 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de -1300 N donc vaut $0 - 1300 \text{ N} = -1300 \text{ N}$.

Déterminer pour chaque tronçon entre singularité et au niveau de chaque singularité l'effet du chargement sur l'effort tranchant

Tronçon entre les singularités 1 et 2 :

Il existe un chargement réparti égal à -100 N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100 N/m .

Infiniment proche à gauche de la singularité 2, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,2} = T_{y,1} + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 2 \text{ m} = -1300 + 100 \times 2 = -1100 \text{ N}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à -1000 N (le signe est fonction du repère local choisi). Donc l'effort tranchant subit un saut de 1000 N donc vaut infiniment proche à droite de la singularité :

$$-1100 + 1000 = -100 \text{ N}$$

Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

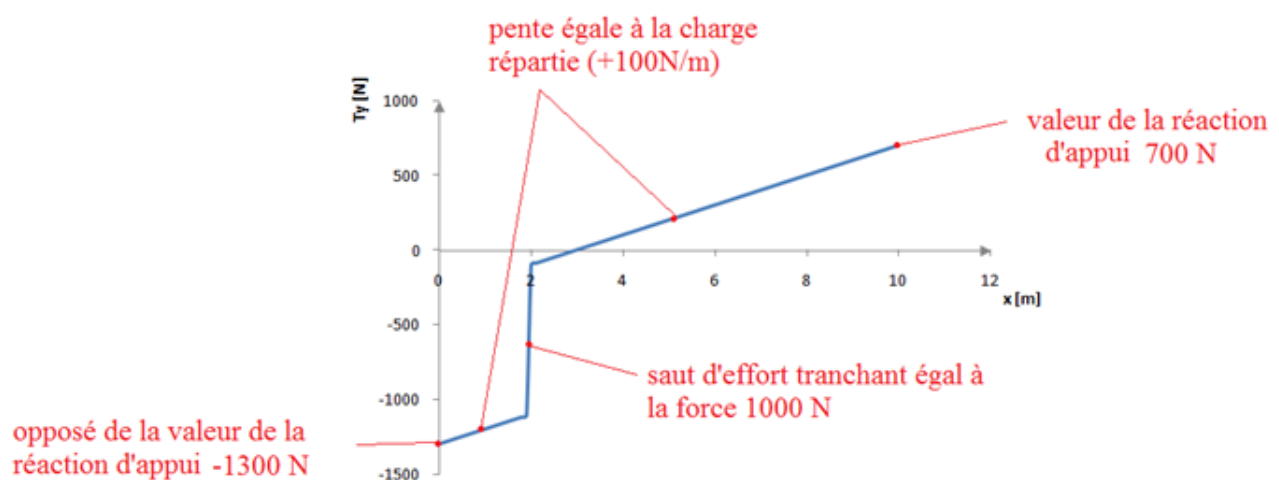
Il existe un chargement réparti égal à -100N/m donc l'effort tranchant est une droite de pente 100N/m .

Infiniment proche à gauche de la singularité 3, l'effort tranchant vaut :

$$T_{y,3} = T_{y,2} + 100 \frac{\text{N}}{\text{m}} \times 8 \text{ m} = -100 + 100 \times 8 = 700 \text{ N}$$

Remarque : la valeur de droite correspond à la réaction d'appui à droite. Cela signifie que les résultats trouvés sont a priori corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

Tracer le diagramme de T_y



Noter les points pour lesquels l'effort tranchant s'annule

L'effort tranchant s'annule pour $x = 3 \text{ m}$

Tracer de gauche à droite le diagramme de M_z

Singularité 1

Au niveau de la singularité 1, le moment est nul (appui simple en extrémité de structure).

Tronçon entre les singularités 1 et 2

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_2 = M_1 - \int_1^2 T$$

$\int_1^2 T$ est la surface de la courbe entre les singularités 1 et 2 et vaut donc :

$$\frac{-1300 - 1100}{2} \times 2 = -2400 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_2 = 0 - (-2400) = 2400 \text{ N.m}$$

Singularité 2 :

La singularité 2 correspond à une force ponctuelle égale à +1000 N. Donc le moment fléchissant subit un saut de pente égal -1000 N/m

Point pour lequel l'effort tranchant s'annule :

Le moment possède une asymptote horizontale au niveau de ce point et vaut :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T$$

$\int_{x=2m}^{x=3m} T$ est la surface de la courbe entre les singularités les abscisses égales à 2m et 3m donc :

$$\frac{-100 + 0}{2} \times 1 = -50 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_{x=3m} = M_{x=2m} - \int_{x=2m}^{x=3m} T = 2400 - (-50) = 2450 \text{ N.m}$$

Tronçon entre les singularités 2 et 3 :

L'effort tranchant est représenté par une droite, donc le moment est représenté par une parabole.

$$M_3 = M_{x=3m} - \int_{x=3m}^3 T$$

$\int_{x=3m}^3 T$ est la surface de la courbe entre le point annulant l'effort tranchant et la singularité 3 et vaut donc :

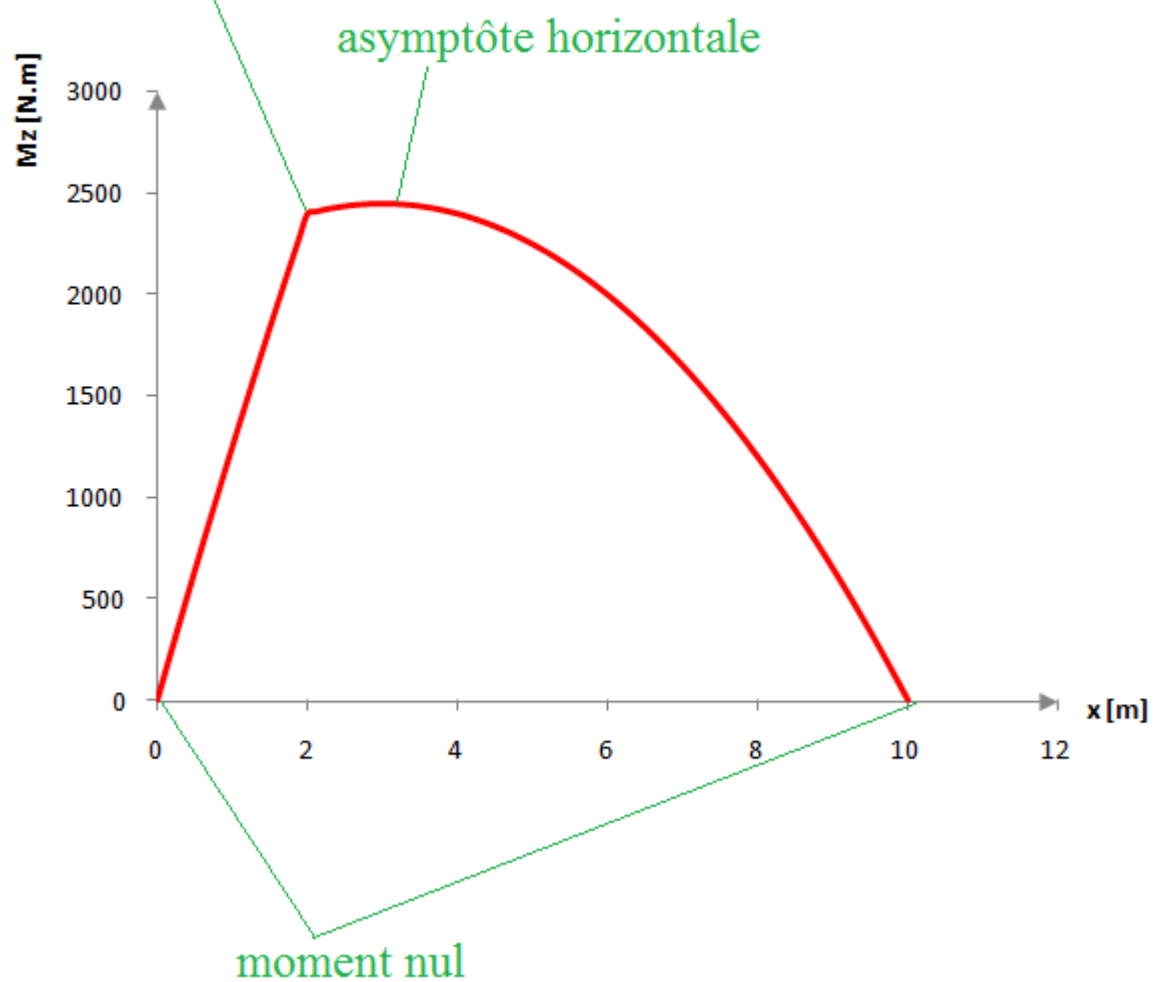
$$\frac{0 + 700}{2} \times 7 = 2450 \text{ N.m}$$

Ainsi :

$$M_3 = 2450 - 2450 = 0 \text{ N.m}$$

Remarque : la valeur de droite est nulle et correspond à la réaction d'appui à droite (car appui rotule en extrémité). Cela signifie que les résultats trouvés sont corrects (sauf si plusieurs erreurs se compensent parfaitement dans l'enchaînement du calcul...).

rupture de pente égale à
-1000 N/m



1.5 Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité

1.5.1 Définitions et calculs

Définition de l'isostaticité

L'équilibre isostatique est atteint si **tout mouvement du solide est impossible** et si le **nombre d'inconnues de liaison appliquées à ce solide est égal au nombre d'équations**.

Remarque : dans le plan, cela donne 3 équations et 3 inconnues.

Définition de l'hypostaticité

S'il reste **une seule possibilité de mouvement** et/ou si le **nombre d'inconnues est inférieur au nombre d'équations**, alors l'équilibre est dit "**hypostatique**".

On l'appelle aussi mécanisme. En fait, cela se traduit par une absence d'équilibre car le système peut bouger.

Définition de l'hyperstaticité

S'il n'y a **aucune possibilité de mouvement** et que le **nombre d'inconnues est strictement supérieur au nombre d'équations**, l'équilibre est dit "**hyperstatique**".

Remarque : la très grande majorité des structures en génie civil sont hyperstatiques afin d'être dans le sens de la sécurité.

Définition du degré d'hyperstaticité

Le **degré d'hyperstaticité** est la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations.

Calcul du nombre d'équations

S'il y a **n** solides dans le système matériel, puisqu'il existe **3** équations d'équilibre par solide, on obtient **$3.n$ équations** au total.

Calcul du nombre d'inconnues

On calcule ensuite le nombre d'inconnues de liaisons qui existent entre deux solides du système matériel :

- 1 inconnue pour un appui simple,
- 2 inconnues pour une articulation entre deux solides,
- 3 inconnues pour un encastrement entre deux solides.

Remarque : si la liaison est entre m solides, on compte alors $(m-1)$ liaisons.

Exemple :

Pour une articulation entre 3 solides, il y a 2 liaisons à 2 inconnues, ce qui donne 4 inconnues.

Pour un encastrement entre 5 solides, il y a 4 liaisons à 3 inconnues, ce qui donne 12 inconnues.

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$d = (1 \cdot L_1 + 2 \cdot L_2 + 3 \cdot L_3) - 3n$$

Avec :

- 1 est le nombre d'inconnue pour un appui simple.
- 2 est le nombre d'inconnues pour une articulation.
- 3 est le nombre d'inconnues pour un encastrement.
- L_1 est le nombre d'appuis simples.
- L_2 est le nombre d'articulations.
- L_3 est le nombre d'encastrements.
- n est le nombre de solides.

Corolaire

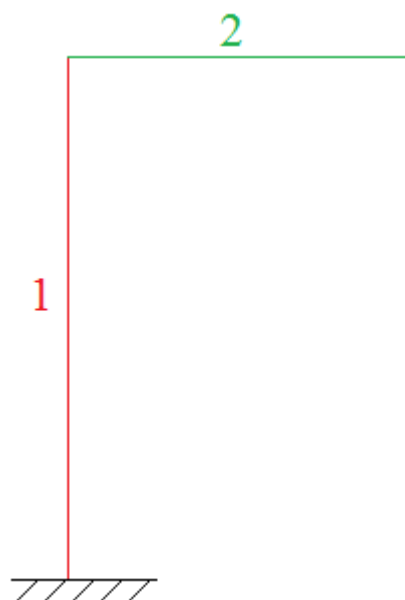
<u>Conditions</u>	<u>Situation</u>
$d = 0$ <u>ET</u> pas de mouvement possible entre solides	Le système est isostatique
$d > 0$ <u>ET</u> pas de mouvement possible entre solides	Le système est hyperstatique
$d < 0$ <u>OU</u> mouvement possible entre solides	Le système est hypostatique.

Boris TEDOLDI RDM - ENTPE 2^{ème} année	Calcul Structure Bâtiment http://www.csb.bet	Page 35/197
1.5.2 Méthode		

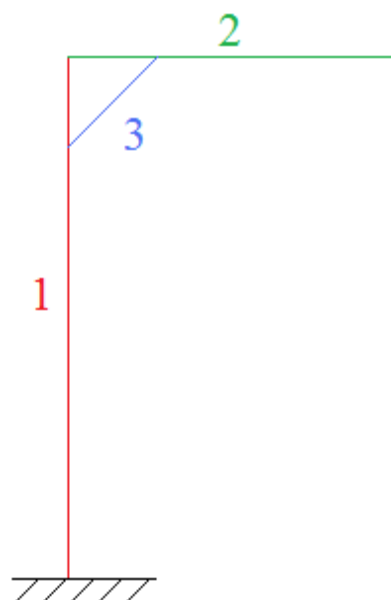
Exemples

Déterminer le de degré et type de staticité (iso/hypo/hyper) des structures suivantes :

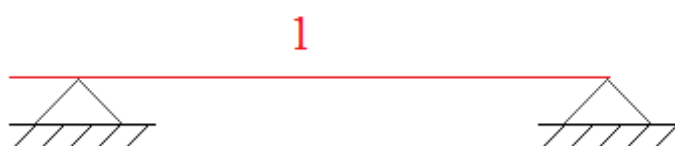
Structure 1



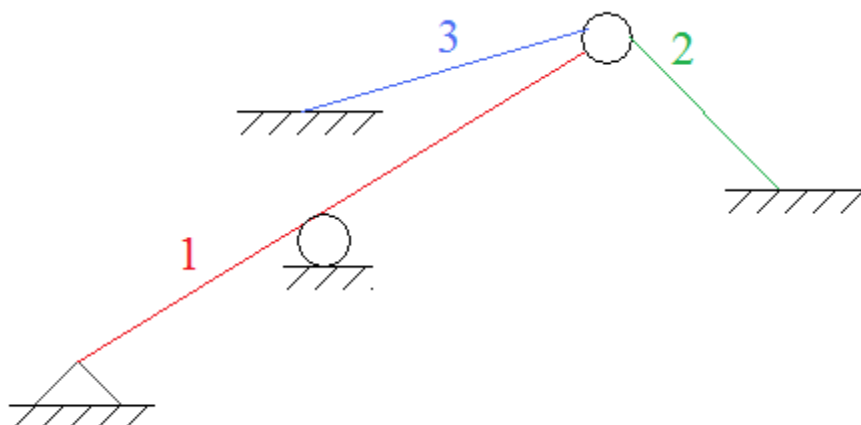
Structure 2



Structure 3



Structure 4



Solution

Structure 1

Calcul du nombre d'équations

2 solides $\rightarrow 2 \times 3 = 6$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3

Le nombre total d'inconnues est 6

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$6 - 6 = 0$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

Conclusion

Le système est isostatique.

Structure 2

Calcul du nombre d'équations

3 solides $\rightarrow 3 \times 3 = 9$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Encastrement	Extérieur et 1	3
Encastrement	1 et 2	3
Encastrement	2 et 3	3
Encastrement	1 et 3	3

Le nombre total d'inconnues est 12

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$12 - 9 = 3$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

Conclusion

Le système est hyperstatique de degré 3.

Structure 3

Calcul du nombre d'équations

1 solide $\rightarrow 1 \times 3 = 3$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Appui simple	Extérieur et 1	1
Appui simple	Extérieur et 1	1

Le nombre total d'inconnues est 2

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$2 - 3 = -1$$

Analyse cinématique

Inutile de faire l'analyse puisque le degré d'hyperstaticité est négatif donc il existe forcément un mouvement possible (dans ce cas, il s'agit d'un mouvement horizontal).

Conclusion

Le système est hypostatique de degré 1.

Structure 4

Calcul du nombre d'équations

3 solides $\rightarrow 3 \times 3 = 9$ équations

Calcul du nombre d'inconnues

Type	Eléments concernés	Nombre associé d'inconnues
Rotule	1, 2 et 3	$2 \times 2 = 4$
Rotule	1 et extérieur	2
Appui simple	1 et extérieur	1
Encastrement	2 et extérieur	3
Encastrement	3 et extérieur	3

Le nombre total d'inconnues est 13

Calcul du degré d'hyperstaticité

$$13 - 9 = 4$$

Analyse cinématique

Pas de mouvement possible.

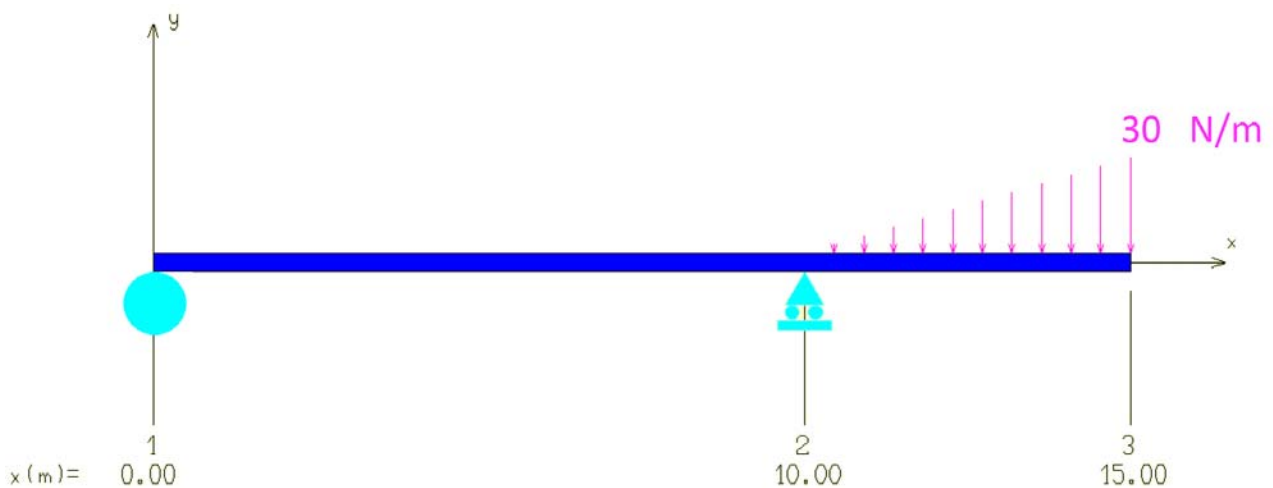
Conclusion

Le système est hyperstatique de degré 4.

1.6 Exercices

Exercice 1

Déterminer les diagrammes de sollicitation de la structure suivante :

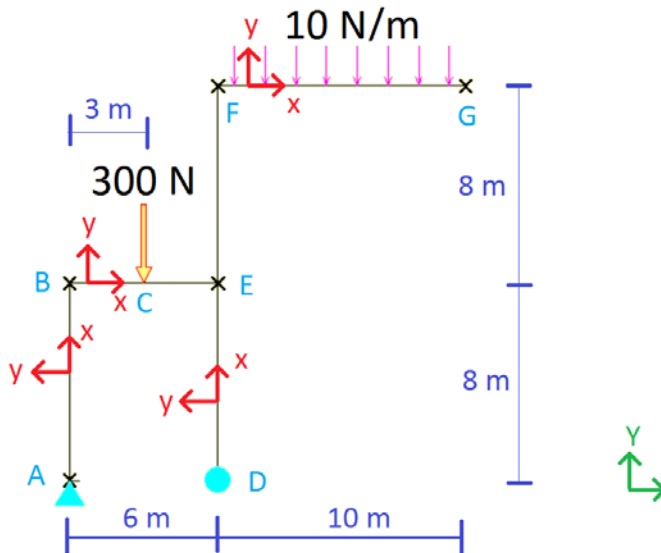


Extrait de solution

$$\begin{aligned} \text{Effort normal : } N &= 0 \\ \text{Effort tranchant : } \begin{cases} V_{\max} = 25 \text{ N} \\ V_{\min} = -75 \text{ N} \end{cases} \\ \text{Moment fléchissant : } \begin{cases} M_{\max} = 0 \text{ N.m} \\ M_{\min} = -250 \text{ N.m} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 2

Déterminer les diagrammes de sollicitation de la structure suivante :



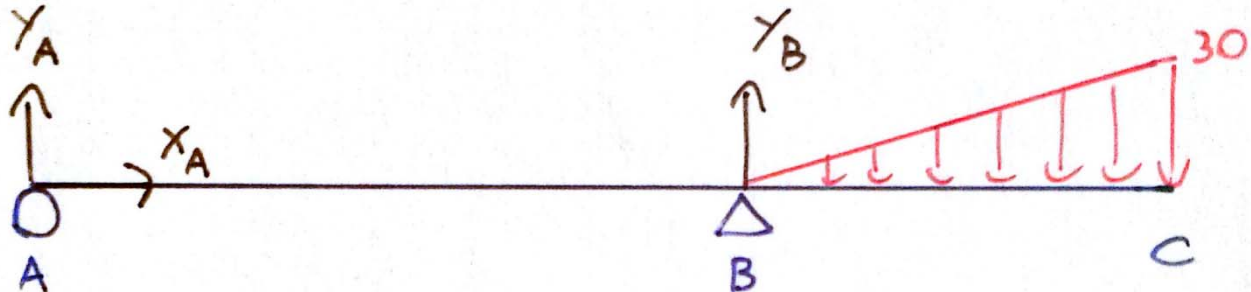
Extrait de solution

$$\begin{aligned} \text{Effort normal : } \begin{cases} N_{\max} = 0 \text{ N.m} \\ N_{\min} = -333,33 \text{ N.m} \end{cases} \\ \text{Moment fléchissant : } \begin{cases} M_{\max} = 200 \text{ N.m} \\ M_{\min} = -500 \text{ N.m} \end{cases} \\ \text{Effort tranchant : } \begin{cases} V_{\max} = 233,33 \text{ N.m} \\ V_{\min} = -100 \text{ N.m} \end{cases} \end{aligned}$$

1.7 Solutions

1.7.1 Solution 1

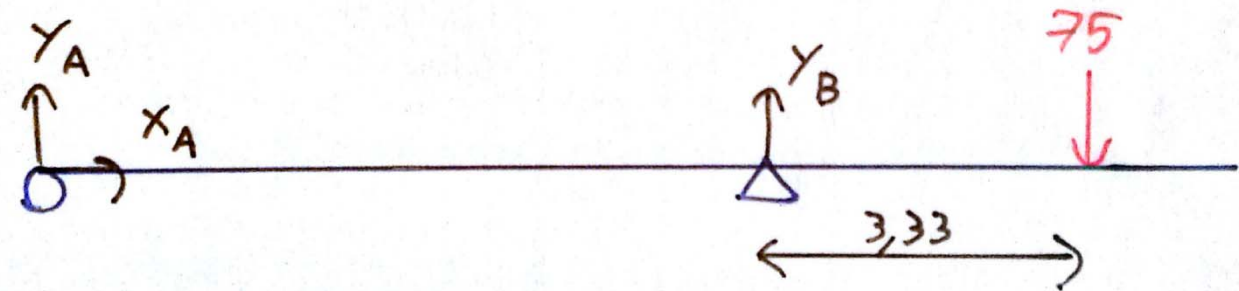
Réactions d'appuis



- La force ponctuelle équivalente de la force répartie triangulaire est égale à :

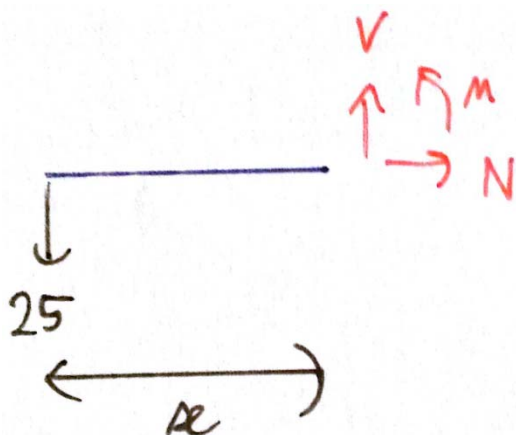
$$\frac{30 \times 5}{2} = 75 \text{ N}$$

Et se situe à 2/3 de la distance BC par rapport au point B :



- $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow X_A = 0$
- Le moment en A est nul (A est une extrémité non encastree) :
 $M_A = 0 \Leftrightarrow 10Y_B - 13,33 \times 75 = 0 \Leftrightarrow Y_B = 100 \text{ N}$
- $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow Y_A + Y_B - 75 = 0 \Leftrightarrow Y_A = -25 \text{ N}$

Coupure entre A et B : $0 \text{ m} < x < 10 \text{ m}$ (partie gauche conservée)

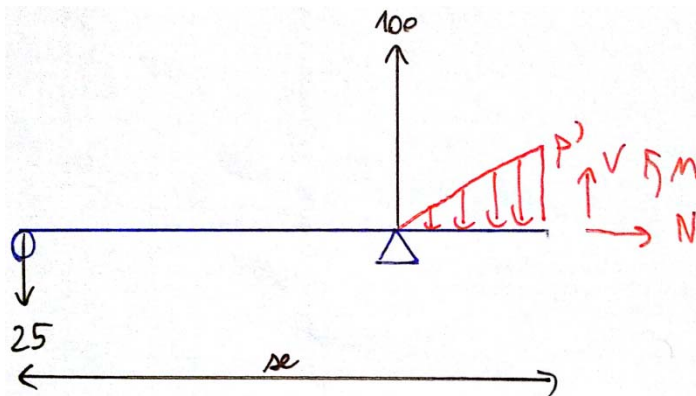


$$N = 0$$

$$V - 25 = 0 \Leftrightarrow V = 25$$

$$M + 25x = 0 \Leftrightarrow M = -25x$$

Coupure entre B et C : $10\text{ m} < x < 15\text{ m}$ (partie gauche conservée)



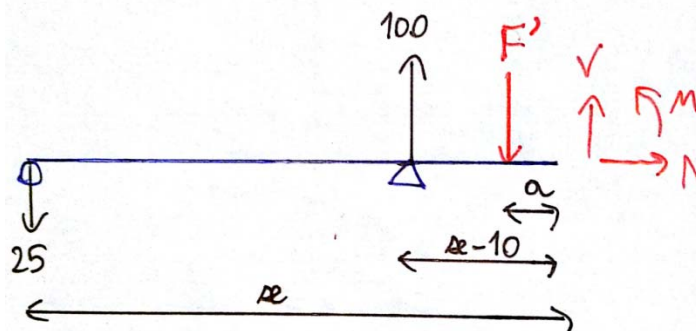
$p'(x)$ est une fonction linéaire de la forme $\alpha x + \beta$ telle que :

$$\begin{cases} p'(x=10) = 0 \\ p'(x=15) = 30 \end{cases}$$

Ainsi : $\begin{cases} 10\alpha + \beta = 0 \\ 15\alpha + \beta = 30 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow p'(x) = 6x - 60$$

Ce qui est statiquement équivalent à :



La distance de la force ponctuelle équivalente par rapport à la coupure est égale au 1/3 de la distance sur laquelle s'applique la force répartie triangulaire donc :

$$a = \frac{x - 10}{3}$$

La force ponctuelle équivalente vaut :

$$F' = \frac{p' \cdot (x - 10)}{2} = 3 \cdot (x - 10)^2$$

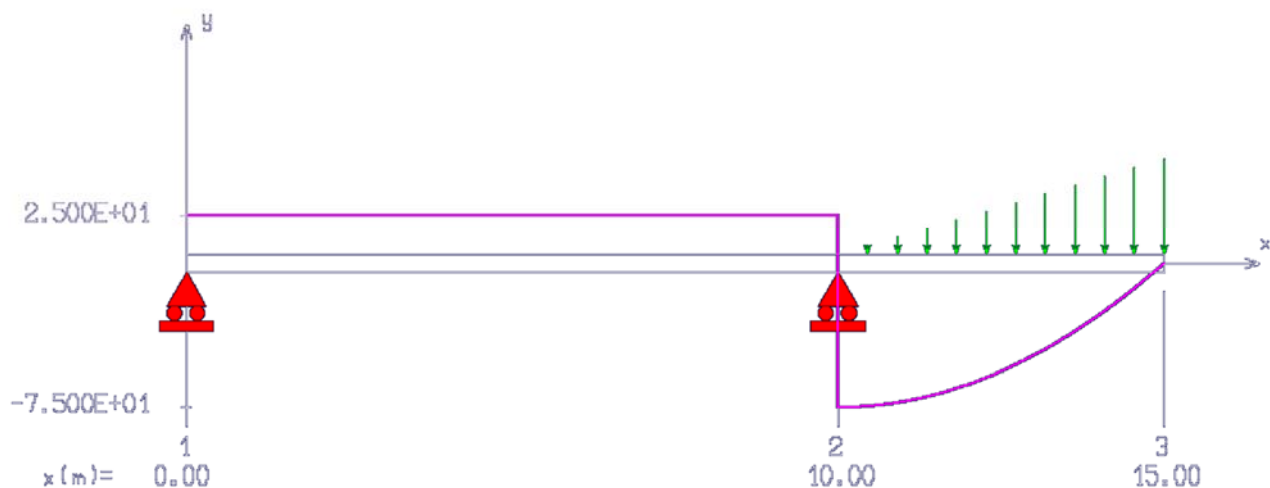
$$N = 0$$

$$V - 25 + 100 - F' = 0 \Leftrightarrow V = 3x^2 - 60x + 225$$

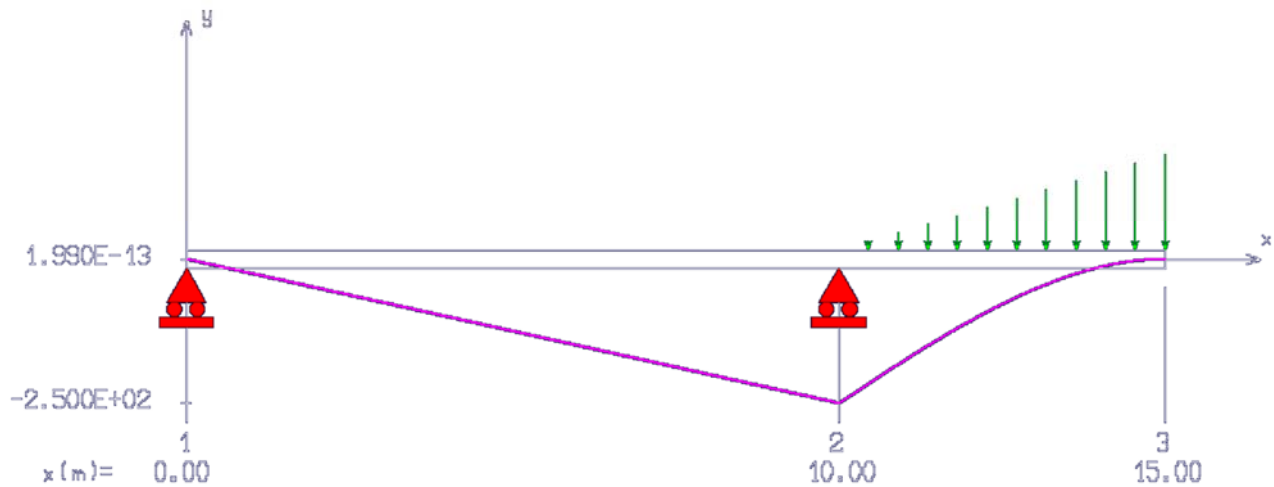
$$M + 25x - 100 \cdot (x - 10) + a \cdot F' = 0 \Leftrightarrow M = -x^3 + 30x^2 - 225x$$

Diagramme de sollicitations

EFFORT TRANCHANT [N]



MOMENT FLECHISSANT [N.m]



1.7.2 Solution 2

Réactions d'appuis

- La force ponctuelle équivalente à la charge répartie est égale à :

$$10 \times 10 = 100 \text{ N}$$

Et elle est positionnée au centre du chargement comme l'illustre le schéma ci-contre

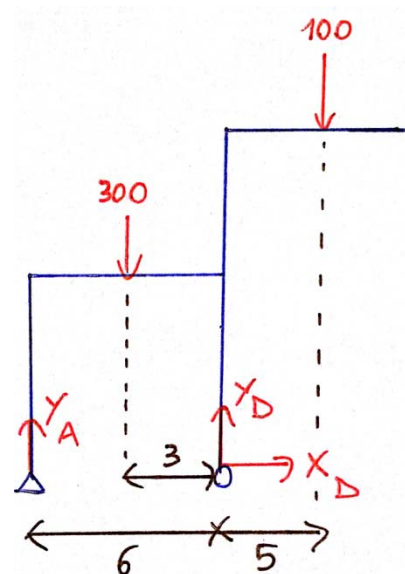
- $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow X_D = 0$
- Le moment en D est nul (D est une extrémité non encastree) :

$$M_D = 0 \Leftrightarrow 6Y_A - 300 \times 3 + 100 \times 5 = 0$$

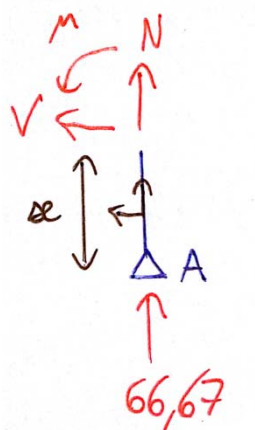
$$\Leftrightarrow Y_A \approx 66,67 \text{ N}$$

- $\sum F_y = 0 \Leftrightarrow Y_A + Y_D - 300 - 100 = 0$

$$\Leftrightarrow Y_D \approx 333,33 \text{ N}$$



Coupure entre A et B (partie gauche conservée)

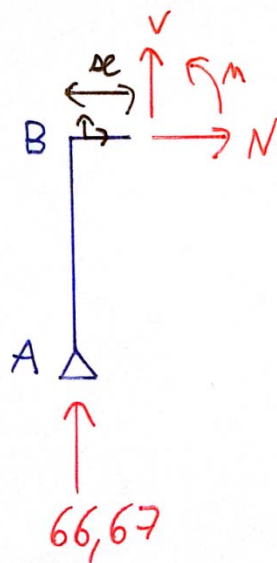


$$N + 66,67 = 0 \Leftrightarrow N \approx -66,67$$

$$V = 0$$

$$M = 0$$

Coupure entre B et C (partie gauche conservée)

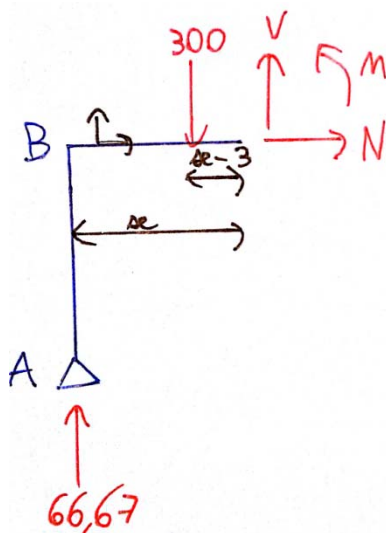


$$N = 0$$

$$V + 66,67 = 0 \Leftrightarrow V \approx -66,67$$

$$M - 66,67 \cdot x = 0 \Leftrightarrow M \approx 66,67 \cdot x$$

Coupure entre C et E (partie gauche conservée)

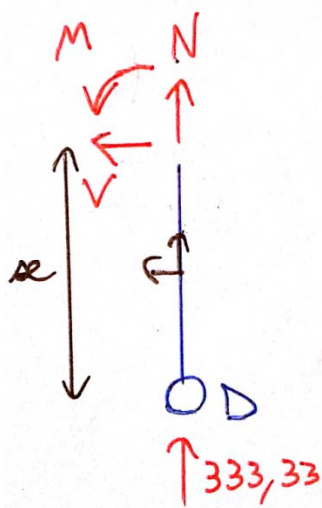


$$N = 0$$

$$V + 66,67 - 300 = 0 \Leftrightarrow V \approx 233,33$$

$$M - 66,67 \cdot x + 300 \cdot (x - 3) = 0 \Leftrightarrow M \approx -233,33 \cdot x + 900$$

Coupure entre D et E (partie gauche conservée)

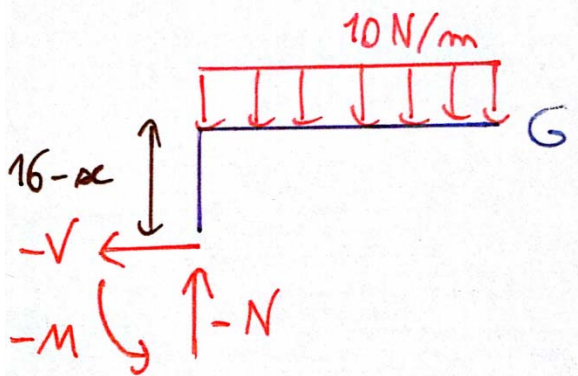


$$N + 333,33 = 0 \Leftrightarrow N \approx -333,33$$

$$V = 0$$

$$M = 0$$

Coupure entre E et F (partie droite conservée)

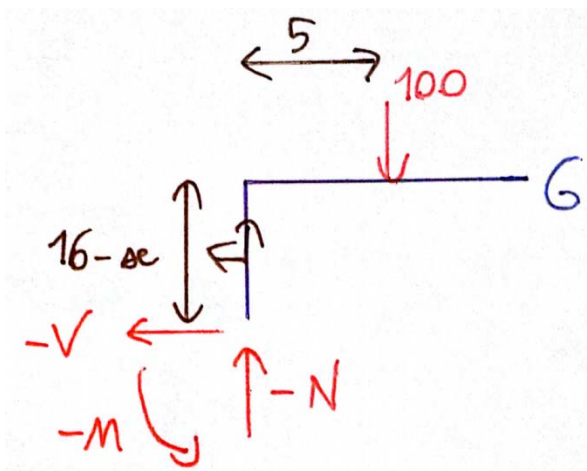


La force ponctuelle équivalente à la charge répartie est égale à :

$$10 \times 10 = 100 \text{ N}$$

Et elle est positionnée au centre du chargement.

Le schéma équivalent est :

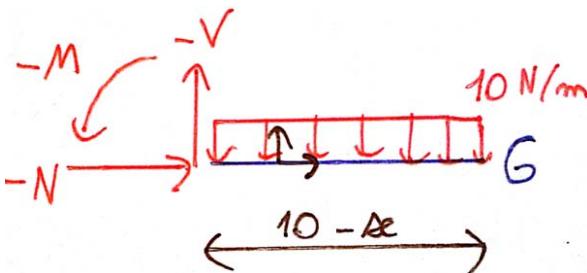


$$-N - 100 = 0 \Leftrightarrow \boxed{N = -100}$$

$$\boxed{V = 0}$$

$$-M - 100 \times 5 = 0 \Leftrightarrow \boxed{M = -500}$$

Coupure entre F et G (partie droite conservée)



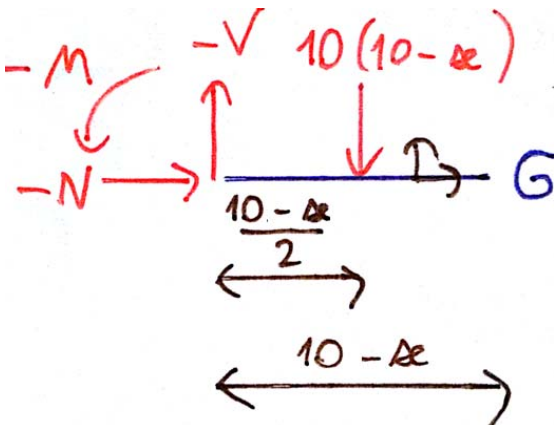
La force ponctuelle équivalente à la charge répartie est égale à :

$$10 \times (10 - x)$$

Et elle est positionnée au centre du chargement soit à la distance de la coupure égale à :

$$\frac{10 - x}{2}$$

Le schéma équivalent est :



$$\boxed{N = 0}$$

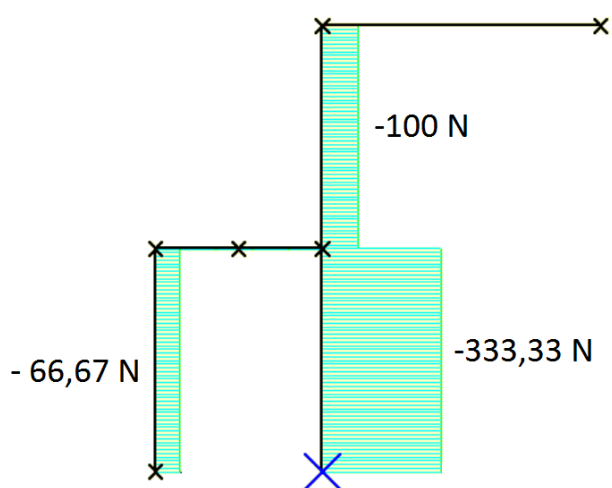
$$-V - 10 \times (10 - x) = 0 \Leftrightarrow \boxed{V = 10x - 100}$$

$$-M - \frac{10 - x}{2} \times 10 \times (10 - x) = 0$$

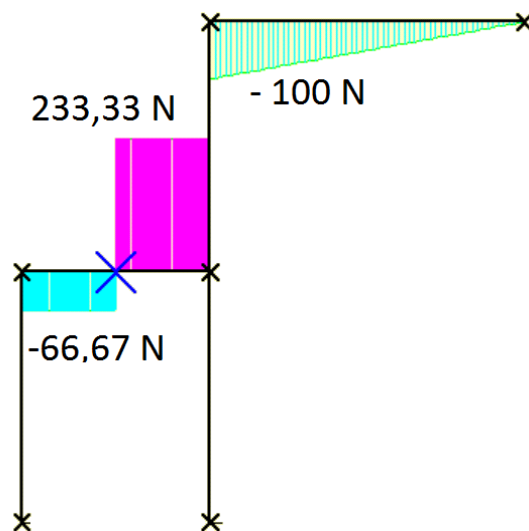
$$\Leftrightarrow \boxed{M = -5x^2 + 100x - 500}$$

Diagrammes de sollicitations

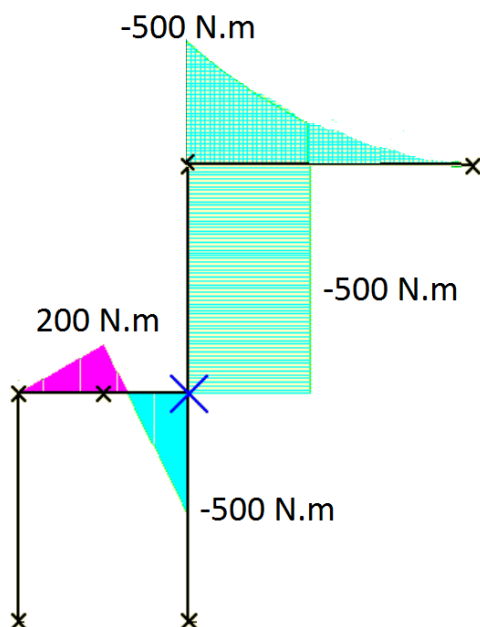
Effort normal N



Effort tranchant V



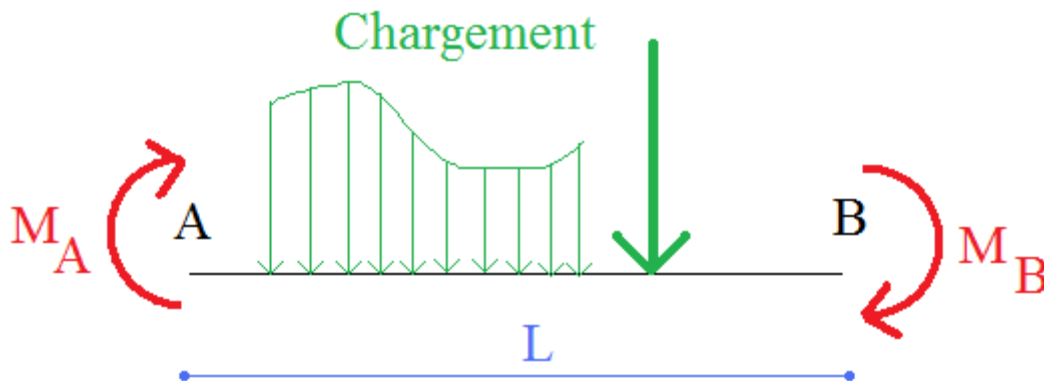
Moment fléchissant M



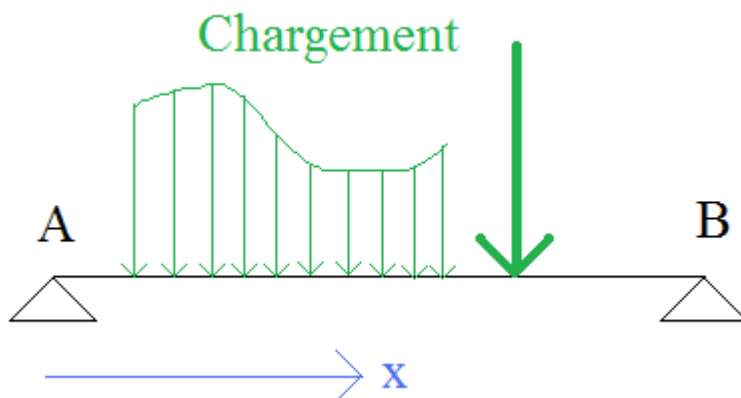
2. Moments et efforts tranchant entre deux sections d'une poutre droite dont les moments sont connus

2.1 Relations

Soit deux sections A et B d'une poutre droite de longueur L, dont on connaît les moments M_A et M_B ¹



En posant $M_{iso}(x)$ le moment et $V_{iso}(x)$ l'effort tranchant calculés à la section d'abscisse x pour la poutre isotatique suivante (deux appuis simples au niveau de A et de B) :



Remarque importante

Les abscisses de A et de B sont égales à :

- $x_A = 0$
- $x_B = L$

Détermination du moment et de l'effort tranchant

Le moment à l'abscisse x est égal à :

$$M(x) = M_{iso}(x) + M_A \cdot \frac{L-x}{L} + M_B \cdot \frac{x}{L}$$

L'effort tranchant à l'abscisse x est égal à :

$$V(x) = V_{iso}(x) + \frac{M_B - M_A}{L}$$

ATTENTION : ces relations ne doivent pas être utilisées pour une portion de poutre en console.

Remarque :

Il peut parfois être plus pratique d'utiliser la relation suivante : $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$

¹ Des méthodes de détermination de moments aux nœuds sont données dans la suite du cours.

2.2 Exemple

Pour une poutre « encastrée-appuyée », un ouvrage de RDM² fournit les renseignements suivants :

□ Cas 4 : charge uniformément répartie

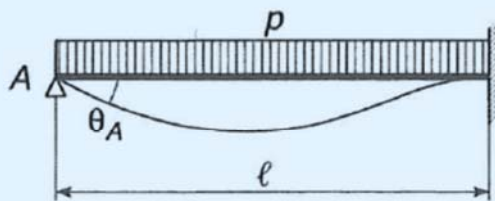


Fig. 9

$$M_B = -\frac{p\ell^2}{8} \quad R_A = \frac{3p\ell}{8} \quad R_B = \frac{5p\ell}{8}$$

$$M_{\max} = \frac{9p\ell^2}{128} \quad \text{pour } x = \frac{3\ell}{8}$$

$$\theta_A = \frac{p\ell^3}{48EI}$$

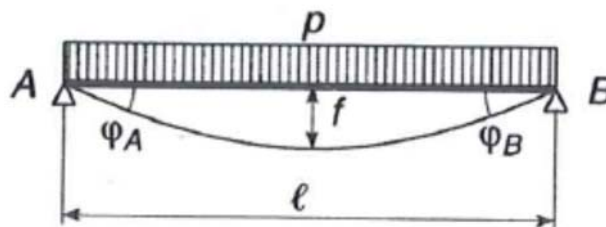
$$y_{\max} = -0,0054 \frac{p\ell^4}{EI} \quad \text{pour } x = 0,421\ell$$

- 1) Déterminer en fonction de x, le moment et l'effort tranchant.
- 2) Démontrer le moment maximal et sa position indiqués par l'aide-mémoire de RDM.

Solution

1)

Remplaçons la poutre encastrée par une poutre bi-appuyée uniformément chargée :



D'après le formulaire des poutres bi-appuyées,

- Le moment isostatique en fonction de x est égal à :

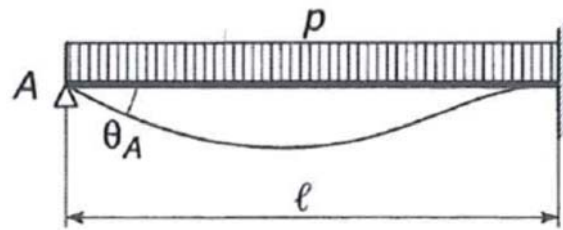
$$M_{iso}(x) = \frac{px}{2} (l - x)$$

- L'effort tranchant isostatique en fonction de x est égal à :

$$V_{iso}(x) = p \left(\frac{l}{2} - x \right)$$

² « Aide-mémoire Résistance des matériaux », 9^{ème} édition, GOULET-BOUTIN-LEROUGE, Editions DUNOD, 2008, page 102.

En revenant à la situation initiale,



Le moment en A est nul puisqu'il s'agit d'une extrémité non encastree.

D'après l'ouvrage,

$$M_B = -\frac{pl^2}{8}$$

Ainsi, le moment fléchissant en fonction de x est égal à :

$$\begin{aligned} M(x) &= M_{iso}(x) + M_A \cdot \frac{l-x}{l} + M_B \cdot \frac{x}{l} \\ &= \frac{px}{2}(l-x) - \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{x}{l} \\ &= \boxed{\frac{px}{8}(3l-4x)} \end{aligned}$$

De même, l'effort tranchant en fonction de x est :

$$\begin{aligned} V(x) &= V_{iso}(x) + \frac{M_B - M_A}{l} \\ &= p\left(\frac{l}{2} - x\right) - \frac{pl^2}{8l} \\ &= \boxed{p \cdot \left(\frac{3l}{8} - x\right)} \end{aligned}$$

2)

Le moment est maximal lorsque sa dérivée s'annule :

$$\frac{dM}{dx} = \frac{p}{8}(3l - 8x_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{3l}{8}}$$

Et le moment maximal est :

$$M_{max} = M\left(x_0 = \frac{3l}{8}\right) = \frac{p \cdot \frac{3l}{8}}{8} \left(3l - 4 \cdot \frac{3l}{8}\right) = \boxed{\frac{9pl^2}{128}}$$

2.3 Détermination des réactions d'appuis à partir des diagrammes de sollicitations³

Notations :

- x_{appui} : abscisse de l'appui dont on souhaite connaître les réactions d'appuis
- x_{appui}^+ : abscisse infiniment proche à droite (au sens du repère local) de x_{appui}
- x_{appui}^- : abscisse infiniment proche à gauche (au sens du repère local) de x_{appui}

Pour chaque appui d'abscisse x_{appui} :

$$\text{Réaction d'appui} = \text{Valeur torseur}(x_{appui}^-) - \text{Valeur torseur}(x_{appui}^+)$$

Ainsi, il est possible de le traduire par :

$$\begin{cases} M_{appui} = M(x_{appui}^-) - M(x_{appui}^+) \\ R_{x,appui} = N(x_{appui}^-) - N(x_{appui}^+) \\ R_{y,appui} = V(x_{appui}^-) - V(x_{appui}^+) \end{cases}$$

Remarque :

- Lorsque l'appui est l'extrémité gauche, alors x_{appui}^- est en dehors de la structure, il est alors pris dans les relations précédentes :

$$\begin{cases} M(x_{appui}^-) = 0 \\ N(x_{appui}^-) = 0 \\ V(x_{appui}^-) = 0 \end{cases}$$

- De même, lorsque l'appui est l'extrémité droite, alors x_{appui}^+ est en dehors de la structure, il est alors également pris :

$$\begin{cases} M(x_{appui}^+) = 0 \\ N(x_{appui}^+) = 0 \\ V(x_{appui}^+) = 0 \end{cases}$$

³ Ce paragraphe peut être vu comme une conséquence du chapitre « *tracé direct des diagrammes de sollicitations* » des rappels de RDM 1.

2.4 Exercices

Exercice 3

Déterminer :

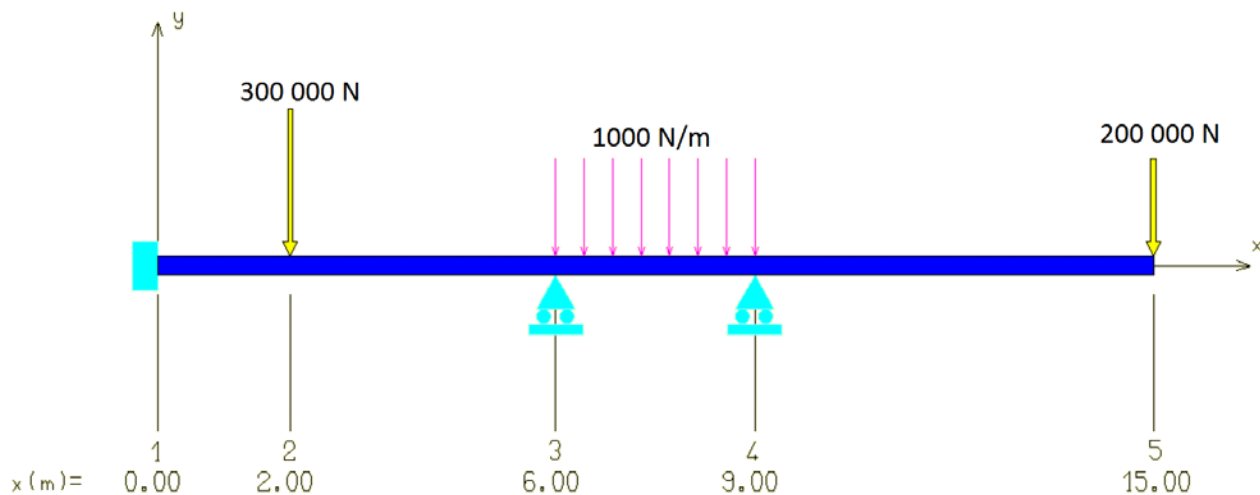
- les fonctions de l'effort tranchant $V(x)$ et du moment fléchissant $M(x)$ le long de la poutre
- les valeurs maximale et minimale de M et de V
- les réactions d'appuis

Les moments au niveau des nœuds sont :

$$\begin{cases} M_1 = -413108 \text{ N.m} \\ M_3 = 159550 \text{ N.m} \\ M_4 = -1200000 \text{ N.m} \end{cases}$$

Extrait de solution

Le moment maximal est pour $x = 2 \text{ m}$
Le moment minimal est pour $x = 9 \text{ m}$



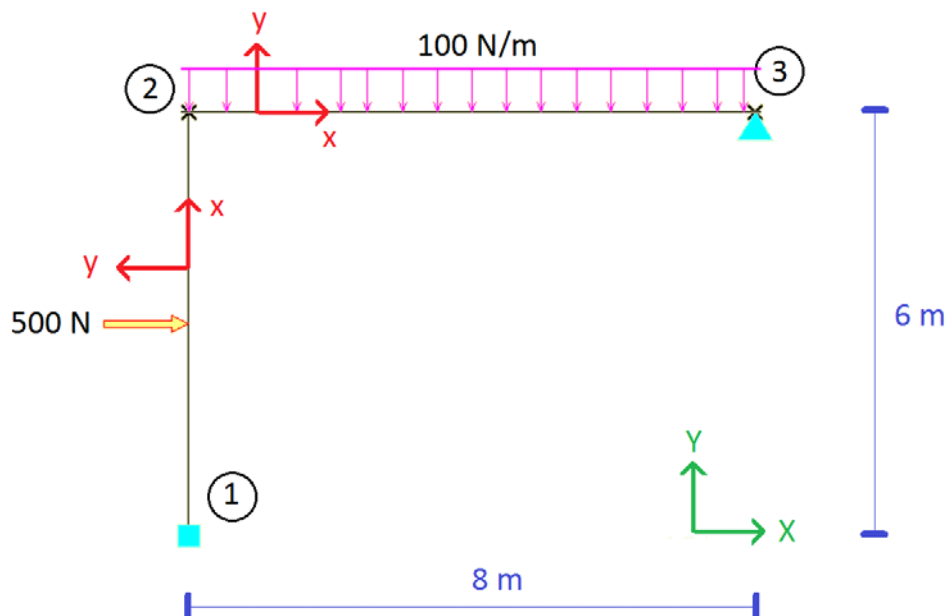
Exercice 4

Déterminer les diagrammes de sollicitations avec :

- $M_1 = -1486,5 \text{ N.m}$
- $M_2 = 13,5 \text{ N.m}$

Extrait de solution

- Le moment maximal sur la poutre 2/3 est égal à 806,7 N.m
- L'effort normal sur la poutre 1/2 vaut -398,3 N



2.5 Solutions**2.5.1 Solution 3****Entre les nœuds 1 et 3** ($0\text{ m} < x < 6\text{ m}$)

D'après les annexes :

Pour $0 < x < 2$	$M_{iso}(x) = \frac{300000 \times 4 \times x}{6} = 200000 \cdot x$
Pour $2 < x < 6$	$M_{iso}(x) = 300000 \times 2 \times \left(1 - \frac{x}{6}\right) = 600000 - 100000 \cdot x$

Puisque

$$\begin{cases} M_1 = -413108\text{ N.m} \\ M_3 = 159550\text{ N.m} \end{cases}$$

Alors :

Pour $0 < x < 2$	$M(x) = 200000 \cdot x - 413108 \cdot \frac{6-x}{6} + 159550 \cdot \frac{x}{6}$ $\Leftrightarrow M(x) = 295443 \cdot x - 413108$
Pour $2 < x < 6$	$M(x) = 600000 - 100000 \cdot x - 413108 \cdot \frac{6-x}{6} + 159550 \cdot \frac{x}{6}$ $\Leftrightarrow M(x) = 186892 - 4557 \cdot x$

Puisque $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$, alors il vient que :

Pour $0 < x < 2$	$V(x) = -295443$
Pour $2 < x < 6$	$V(x) = 4557$

Entre les nœuds 3 et 4 ($6\text{ m} < x < 9\text{ m}$)En posant $X' = x - 6$, d'après les annexes :

$$M_{iso}(X') = \frac{1000X'}{2}(3 - X')$$

Puisque

$$\begin{cases} M_3 = 159550\text{ N.m} \\ M_4 = -1200000\text{ N.m} \end{cases}$$

alors

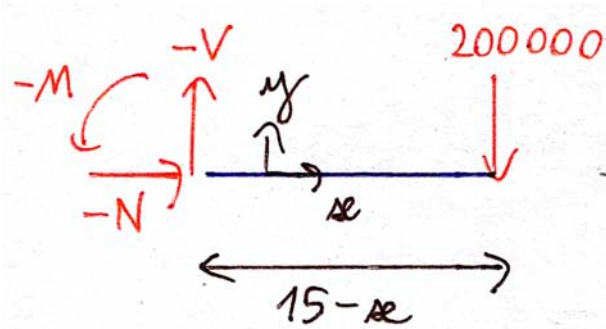
$$\begin{aligned} M(X') &= \frac{1000X'}{2}(3 - X') + 159550 \cdot \frac{3 - X'}{3} - 1200000 \cdot \frac{X'}{3} \\ \Leftrightarrow M(X') &= -500X'^2 - 451683X' + 159550 \\ \Leftrightarrow M(x) &= -500x^2 - 445683x + 2851650 \end{aligned}$$

Et

$$V(x) = 1000x + 445683$$

Entre les nœuds 4 et 5 ($9\text{ m} < x < 15\text{ m}$)

L'utilisation de la relation $M(x) = M_{iso}(x) + M_A \cdot \frac{L-x}{L} + M_B \cdot \frac{x}{L}$ n'est pas autorisée puisqu'il s'agit d'une portion de poutre en console. Ainsi, une coupure est effectuée en conservant la partie droite :



$$-V - 200000 = 0$$

$$\Leftrightarrow V(x) = -200000$$

$$-M - 200000 \times (15 - x) = 0$$

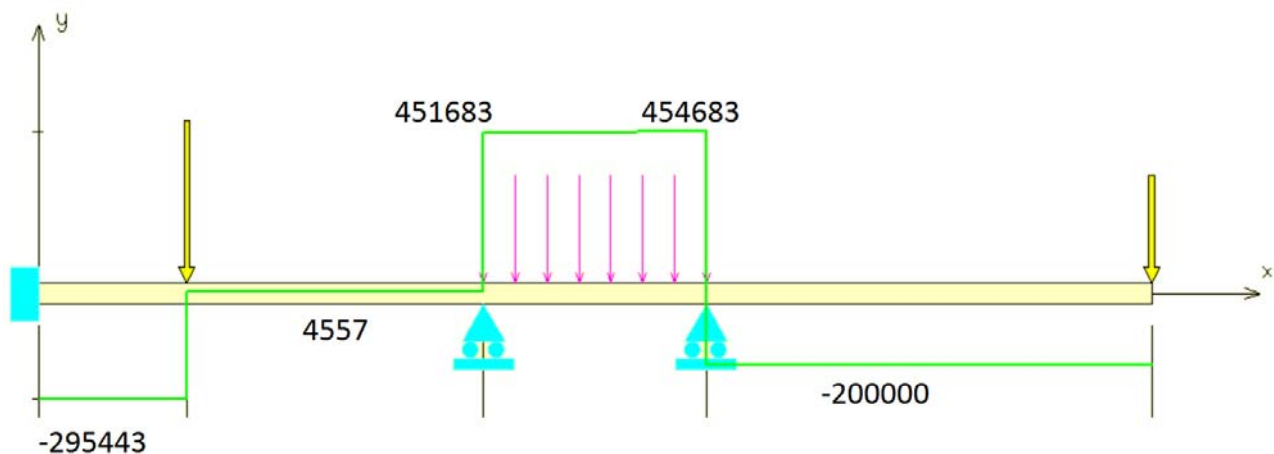
$$\Leftrightarrow M(x) = -3000000 + 200000x$$

Bilan

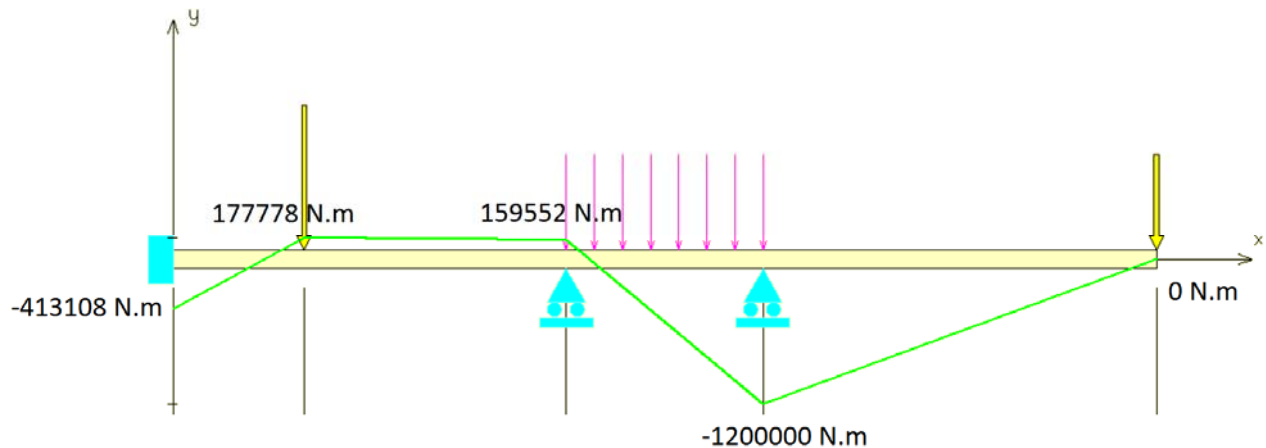
Pour $0 < x < 2$	$M(x) = 295443 \cdot x - 413108$ $V(x) = -295443$
Pour $2 < x < 6$	$M(x) = 186892 - 4557 \cdot x$ $V(x) = 4557$
Pour $6\text{ m} < x < 9\text{ m}$	$M(x) = -500x^2 - 445683x + 2851650$ $V(x) = 1000x + 445683$
Pour $9\text{ m} < x < 15\text{ m}$	$M(x) = -3000000 + 200000x$ $V(x) = -200000$

Le tracé des diagrammes de sollicitations permet de connaître les valeurs maximales et minimales :

Effort tranchant



Moment fléchissant



Ainsi,

$$\begin{cases} V_{max} = 454683 \text{ N} \\ V_{min} = -295443 \text{ N} \end{cases}$$

Et

$$\begin{cases} M_{max} = 177778 \text{ N.m} \\ M_{min} = -1200000 \text{ N.m} \end{cases}$$

Réactions d'appuis

Au niveau de l'encastrement ($x = 0 \text{ m}$)

$$M(x = 0) = M(0^-) - M(0^+)$$

$$R_y(x = 0) = V(0^-) - V(0^+)$$

Le point d'abscisse $x = 0$ est l'extrémité gauche alors

- $M(0^-) = 0$
- $V(0^-) = 0$

Il vient alors que :

$$M(x = 0) = 0 - (-413108) = 413108 \text{ N.m}$$

$$R_y(x = 0) = 0 - (-295443) = 295443 \text{ N}$$

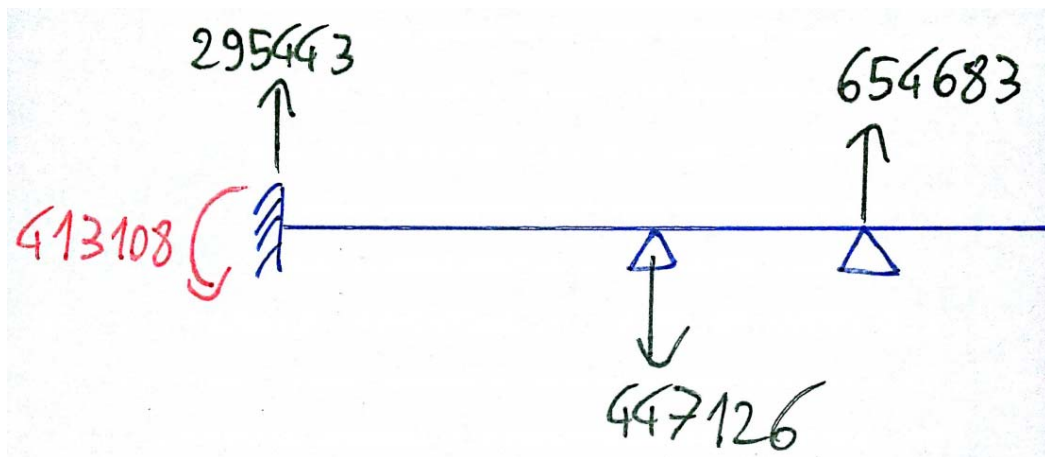
Au niveau de l'appui 3 ($x = 6 \text{ m}$)

$$\begin{aligned} R_y(x = 6) &= V(6^-) - V(6^+) = 4557 - 451683 \\ &= -447126 \text{ N} \end{aligned}$$

Au niveau de l'appui 3 ($x = 9 \text{ m}$)

$$\begin{aligned} R_y(x = 9) &= V(9^-) - V(9^+) = 454683 - (-200000) \\ &= 654683 \text{ N} \end{aligned}$$

Il est possible de schématiser les réactions d'appuis par :



2.5.2 Solution 4

Entre les nœuds 2 et 3 ($0 \text{ m} < x < 8 \text{ m}$)

D'après les annexes :

$$M_{iso}(x) = \frac{100x}{2}(8-x)$$

Puisque

- $M_2 = 13,5 \text{ N.m}$
- $M_3 = 0 \text{ N.m}$ (extrémité non encastree)

alors

$$M(x) = \frac{100x}{2}(8-x) + 13,5 \cdot \frac{8-x}{8}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M(x) = -50x^2 + 398,3x + 13,5}$$

En utilisant $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$

$$\boxed{V(x) = 100x - 398,3}$$

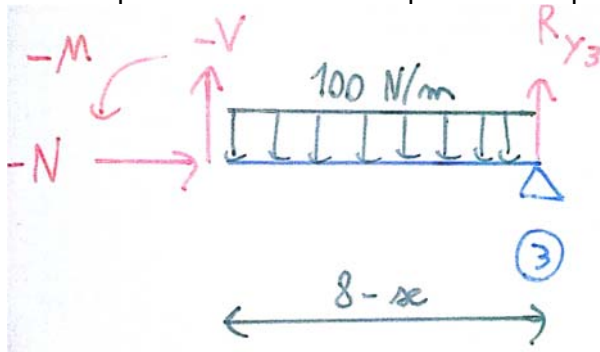
Le moment est maximal lorsque sa dérivée s'annule (c'est-à-dire que V est nul), donc M est maximal à l'abscisse :

$$100x_0 - 398,3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 3,983 \text{ m}$$

Sur la poutre 2/3, le moment maximal est donc :

$$-50 \times 3,983^2 + 398,3 \times 3,983 + 13,5 \approx \boxed{806,7 \text{ N.m}}$$

Une coupure en conservant la partie droite permet de déterminer l'effort normal :



$$\boxed{N(x) = 0}$$

Entre les nœuds 1 et 2 ($0\text{ m} < x < 6\text{ m}$)

D'après les annexes :

Pour $0 < x < 3$	$M_{iso}(x) = \frac{500 \times 3 \times x}{6} = 250 \cdot x$
Pour $2 < x < 3$	$M_{iso}(x) = 500 \times 3 \times \left(1 - \frac{x}{6}\right) = 1500 - 250 \cdot x$

Puisque

$$\begin{cases} M_1 = -1486,5 \text{ N.m} \\ M_2 = 13,5 \text{ N.m} \end{cases}$$

Alors :

Pour $0 < x < 3$	$M(x) = 250 \cdot x - 1486,5 \cdot \frac{6-x}{6} + 13,5 \cdot \frac{x}{6}$ $\Leftrightarrow \boxed{M(x) = 500 \cdot x - 1486,5}$
Pour $3 < x < 6$	$M(x) = 1500 - 250 \cdot x - 1486,5 \cdot \frac{6-x}{6} + 13,5 \cdot \frac{x}{6}$ $\Leftrightarrow \boxed{M(x) = 13,5}$

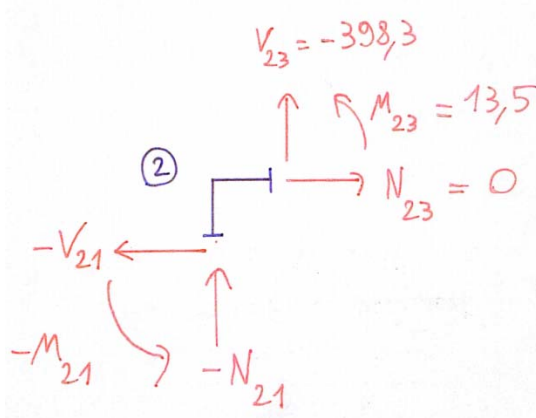
Puisque $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$, alors il vient que :

Pour $0 < x < 3$	$\boxed{V(x) = -500}$
Pour $3 < x < 6$	$\boxed{V(x) = 0}$

Pour connaître l'effort normal, l'équilibre au niveau du nœud 2 est réalisé, c'est-à-dire entre :

- Le torseur du nœud 2 de la poutre 1/2 (partie droite conservée donc signe négatif)
- Le torseur du nœud 2 de la poutre 2/3 (partie gauche conservée donc signe positif)

Or le torseur de la poutre 2/3 est connu donc



L'équilibre en force vertical est :

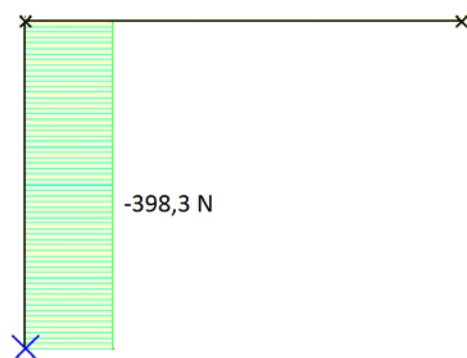
$$-N_{2/1} + V_{2/3} = 0 \Leftrightarrow -N_{2/1} - 398,3 = 0$$

Puisqu'il n'y a pas de force selon $\vec{x}$ le long de la poutre 1/2, alors l'effort normal est constant entre les nœuds 1 et 2, ainsi :

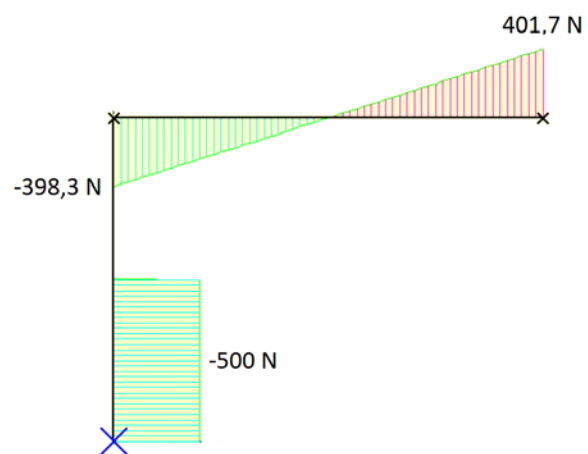
$$\boxed{N = -398,3}$$

Les diagrammes de sollicitations sont alors :

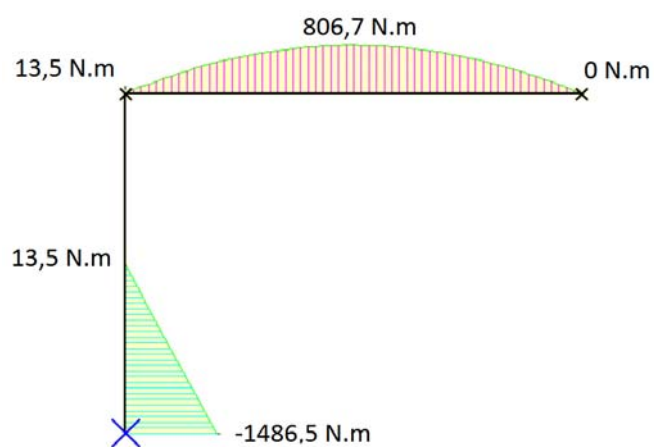
Effort normal



Effort tranchant



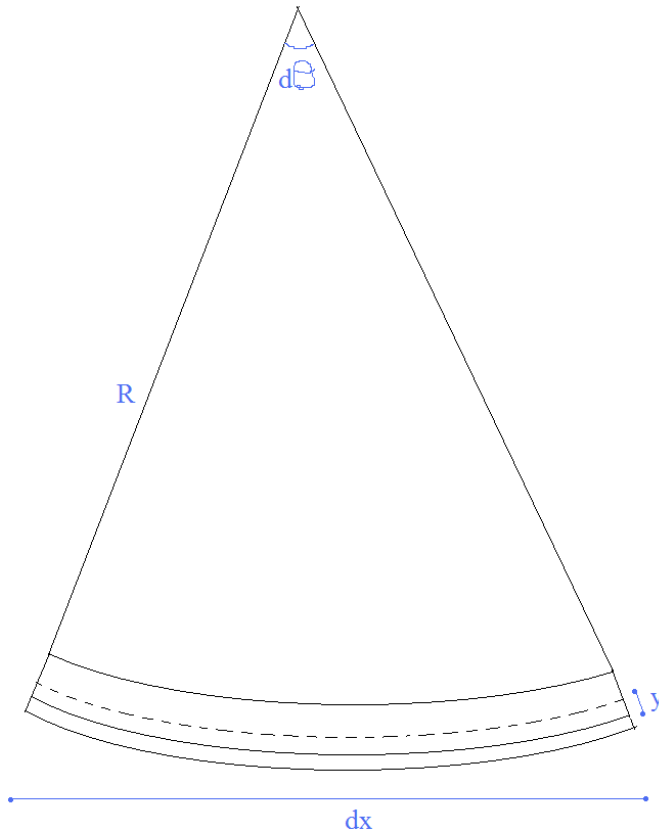
Moment fléchissant



3. Calcul d'une flèche

3.1 Relation liant le moment, l'inertie, le module de Young et la flèche

Hypothèse : flexion pure selon z



M_z est constant sur dx .

D'après le cours de RDM 1^{ère} année :

$$\sigma_x = -\frac{M_z}{I_z} y$$

La loi de Hooke s'exprime par : $E\varepsilon_x = \sigma_x$

$$\text{Ainsi : } \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{M_z}{EI_z} y$$

La définition de la déformation est :

$$\varepsilon_x = \frac{\text{longueur finale} - \text{longueur initiale}}{\text{longueur initiale}}$$

D'où :

$$\varepsilon_x = \frac{(R+y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

Or le rayon de courbure est (voir cours prépa) :

$$R = -\frac{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2f}{dx^2}}$$

$$\text{puisque } \left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2} \sim 1$$

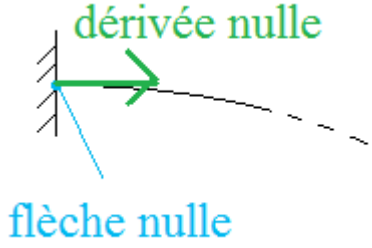
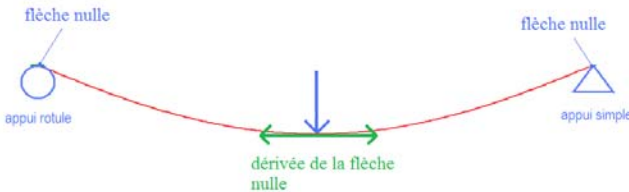
$$R \approx -\frac{1}{\frac{d^2f}{dx^2}} \quad \text{et : } \varepsilon_x = -y \frac{d^2f}{dx^2}$$

$$\text{Au final : } \boxed{EI_z \frac{d^2f}{dx^2} = -M_z(x)}$$

Ainsi, la flèche se calcule par la double intégrale de $\frac{-M_z(x)}{EI_z}$.

3.2 Valeurs connues et propriété de la fonction représentative de la flèche

Pour intégrer (doublement) et déterminer les constantes, il convient de connaître les valeurs en certains points de la flèche et/ou de sa dérivée :

	Représentation	Résultats sur la flèche	Résultats pour la dérivée de la flèche : $\frac{df}{dx}$
Encastrement		$f = 0$	$\frac{df}{dx} = 0$
Appui rotule ou appui simple		$f = 0$	
Centre d'une poutre symétrique en géométrie et en chargement			$\frac{df}{dx} = 0$

De plus, il peut parfois être utile d'exploiter le fait que :

La fonction de la flèche est C1, c'est-à-dire que :

- La flèche est continue
- La dérivée de la flèche est continue

3.3 Notion de courbure

Définition de la courbure

La courbure χ est l'inverse du rayon de courbure :

$$\chi = \frac{1}{R}$$

Propriété 1

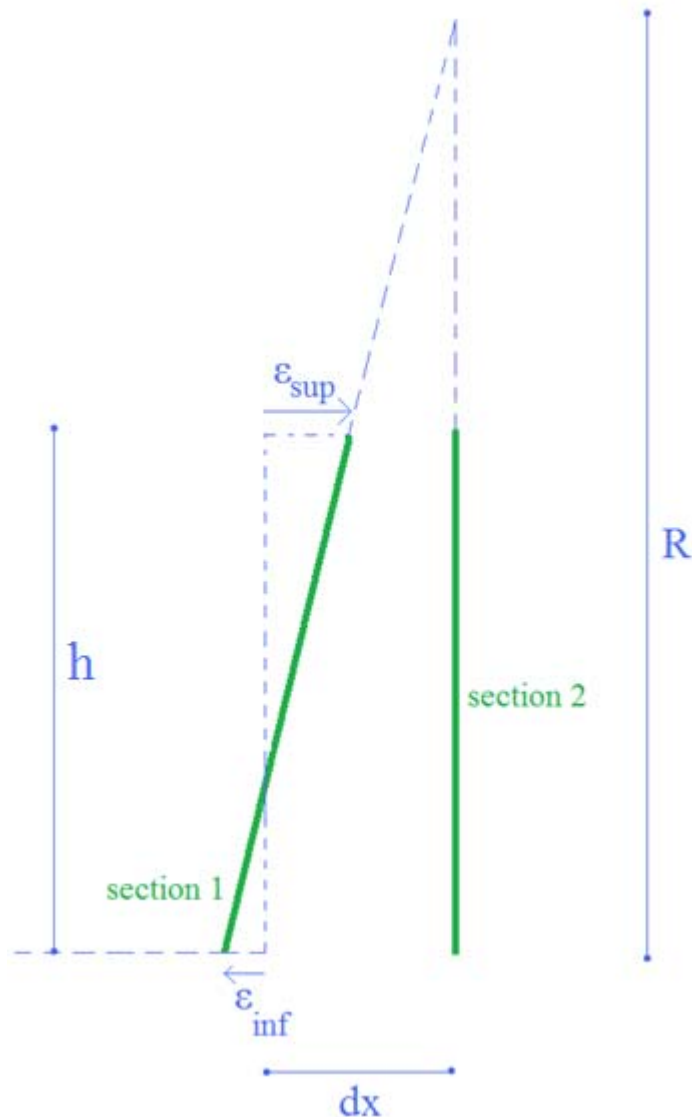
La courbure est égale à :

$$\chi = \frac{-M_z(x)}{EI_z}$$

Propriété 1

Pour une section de hauteur h dont les déformations en fibre supérieures et inférieures sont connues, la courbure en élastique linéaire peut être déterminée par :

$$\chi = \frac{\varepsilon_{sup} - \varepsilon_{inf}}{h}$$



3.4 Méthode

- I. Déterminer le moment fléchissant en tout point
- II. Effectuer une double intégrale du moment pour l'équation de la flèche avec :

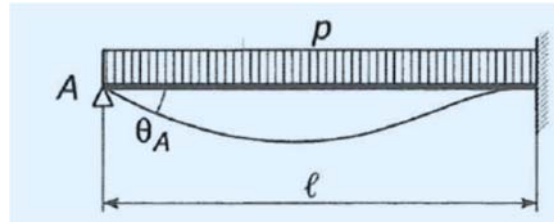
$$\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z}$$

- III. Les constantes sont déterminées à l'aide des valeurs connues.
- IV. Une fois la fonction de la flèche entièrement déterminée, une étude de cette fonction permet de connaître la position et la flèche maximale.

3.5 Exemple

Pour une poutre « encastrée-appuyée », le moment en tout point (voir solution du chapitre précédent) est égal à :

$$M(x) = \frac{px}{8} (3l - 4x) = \frac{p}{8} (3lx - 4x^2)$$



Calculer la flèche maximale f_{max} .

Solution

1) Le moment est connu :

$$M(x) = \frac{px}{8} (3l - 4x) = \frac{p}{8} (3lx - 4x^2)$$

2) La double intégration de $\frac{d^2f}{dx^2} = -\frac{M_z(x)}{EI_z}$ donne :

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= -\frac{1}{EI_z} \int_0^x \left[\frac{p}{8} (3lx - 4x^2) \right] dx \\ &= -\frac{p}{8EI_z} \int_0^x [3lx - 4x^2] dx \\ &= -\frac{p}{8EI_z} \left[\frac{3lx^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + A \right] \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{p}{8EI_z} \int_0^x \left[\frac{3lx^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + A \right] dx \\ &= -\frac{p}{8EI_z} \left[\frac{3lx^3}{6} - \frac{4x^4}{12} + Ax + B \right] \end{aligned}$$

3) Puisque les résultats avec les constantes A et B sont :

$\frac{df}{dx} = -\frac{p}{8EI_z} \left[\frac{3lx^2}{2} - \frac{4x^3}{3} + A \right]$	$f(x) = -\frac{p}{8EI_z} \left[\frac{3lx^3}{6} - \frac{4x^4}{12} + Ax + B \right]$
--	---

Et qu'au niveau de l'appui simple ($x = 0$), il est connu que :

$$f = 0$$

alors

$$B = 0$$

De plus, au niveau de l'encastrement ($x = l$), il est également connu que :

$$\frac{df}{dx} = 0$$

Donc

$$\frac{3l^3}{2} - \frac{4l^3}{3} + A = 0 \Leftrightarrow A = -\frac{l^3}{6}$$

Ainsi,

$$f(x) = \frac{p \cdot [2l^3x - 6lx^3 + 4x^4]}{96EI_z}$$

Remarque :

Il y avait deux constantes à déterminer et 3 valeurs connues :

Encastrement ($x = l$) :

$$\frac{df}{dx}(x = l) = 0 \quad (V1)$$

$$f(x = l) = 0 \quad (V2)$$

Appui simple ($x = 0$) :

$$f(x = 0) = 0 \quad (V3)$$

Pour la résolution de l'exemple, les valeurs connues (V1) et (V3) ont été exploitées, mais il aurait tout à fait été équivalent d'utiliser les conditions (V1) et (V2) ou les conditions (V2) et (V3).

De fait, (V2) est bien respecté puisque :

$$f(x = l) = \frac{p \cdot [2l^4 - 6l^4 + 4l^4]}{96EI_z} = 0$$

- 4) Pour trouver la flèche maximale, trouvons un extremum de la fonction de la flèche compris entre $]0 ; l[$:

$$f(x) = \frac{p \cdot [2l^3x - 6lx^3 + 4x^4]}{96EI_z}$$

On passera par l'étude entre $]0 ; l[$ de :

$$g(x) = 2l^3x - 6lx^3 + 4x^4$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = 2l^3 - 18lx^2 + 16x^3$$

En posant $x_0 = \alpha \cdot l$ la position de la flèche maximale,

$$\frac{dg(x)}{dx} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot l^3 - 18 \cdot l \cdot (\alpha \cdot l)^2 + 16 \cdot (\alpha \cdot l)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 18\alpha^2 + 16\alpha^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx -0,297 \\ \alpha \approx 0,422 \end{cases}$$

La seule solution acceptable (puisque α doit être compris dans l'intervalle $]0 ; 1[$) est $\alpha \approx 0,422$, ainsi, la position de la flèche maximale est :

$$x_0 = 0,422 \cdot l$$

Et la flèche maximale est égale à :

$$f_{\max} = -0,0054 \frac{pl^4}{EI_z}$$

Remarque : on retrouve bien les données de l'énoncé de l'exemple du chapitre précédent.

3.6 Exercices

Exercice 5

Quelle est la flèche maximale d'une poutre console sous poids propre de portée 5 m ?

Données :

- $E = 210\,000\text{ MPa}$
- $I = 77,67\text{ cm}^4$
- Masse volumique : 8000 kg/m^3
- Aire de la section : $7,57\text{ cm}^2$
- Pesanteur : $g = 10\text{ m/s}^2$

Extrait de solution

$$p_{\text{max}} = 7,7 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = \frac{xp}{df(5m)}$$

Exercice 6

Quelles sont les rotations des nœuds 1, 2 et 3 ?

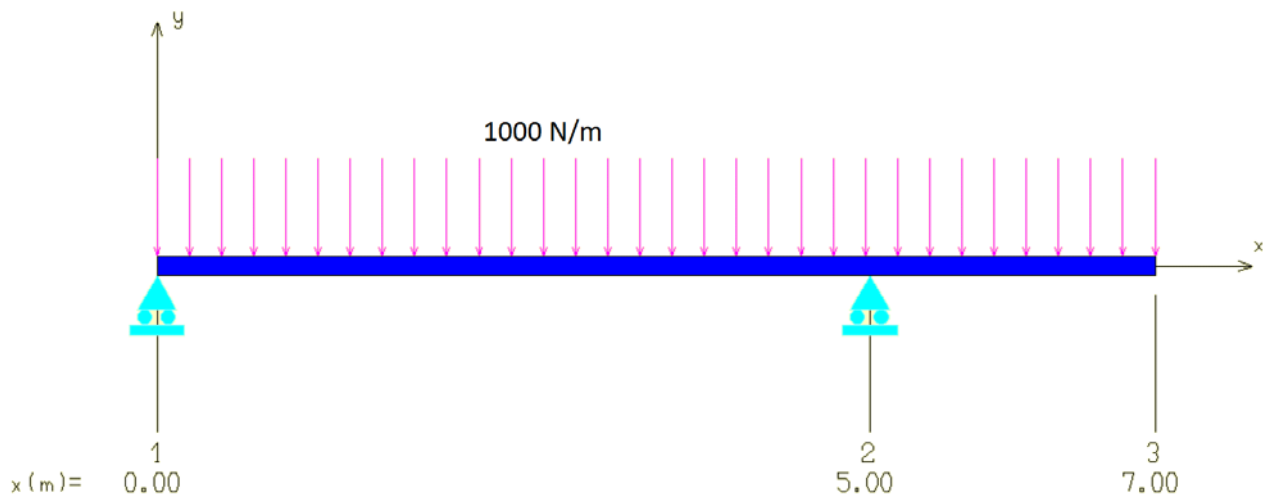
Données :

- $E = 30\,000\text{ MPa}$
- $I = 10455\text{ cm}^4$

Extrait de solution

$$\begin{cases} |R_3| < |R_2| < R_1 \\ R_2 < R_3 < R_1 \end{cases}$$

En posant R_1 la rotation du nœud 1

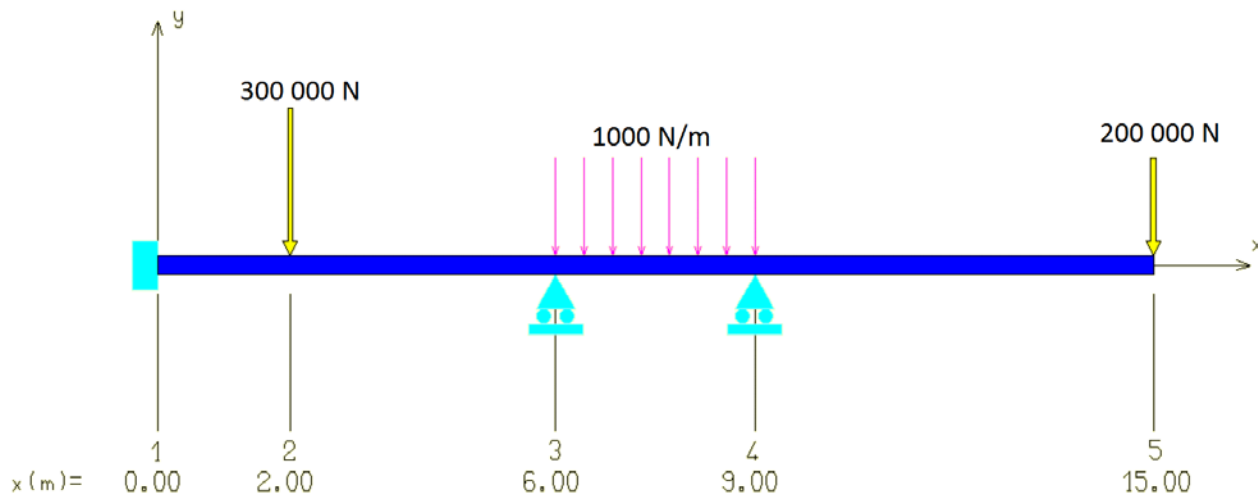


Sachant que :

Pour $0 < x < 5$	$M(x) = -500x^2 + 2100x$
Pour $5 < x < 7$	$M(x) = -500x^2 + 7000x - 24500$

Exercice 7

Déterminer la fonction représentative de la flèche de la poutre suivante :



Sachant que :

Pour $0 < x < 2$	$M(x) = 295443 \cdot x - 413108$
Pour $2 < x < 6$	$M(x) = 186892 - 4557 \cdot x$
Pour $6 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$	$M(x) = -500x^2 - 445683x + 2851650$
Pour $9 \text{ m} < x < 15 \text{ m}$	$M(x) = -3000000 + 200000x$

Et

- $E = 210\,000 \text{ MPa}$
- $I = 722299 \text{ cm}^4$

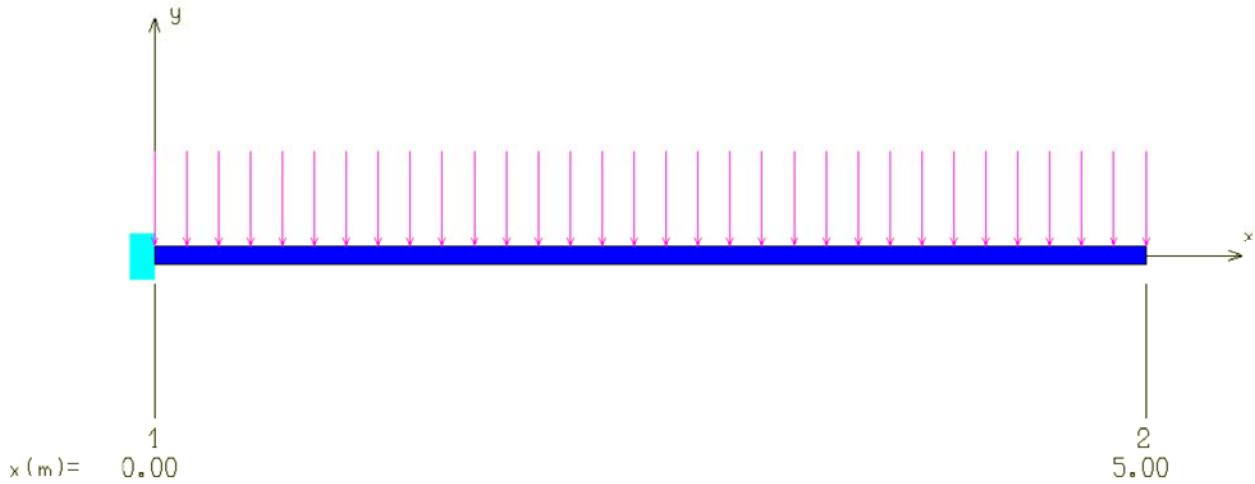
Extrait de solution

$f_{\text{max}} = 1,39 \text{ cm}$

3.7 Solutions

3.7.1 Solution 5

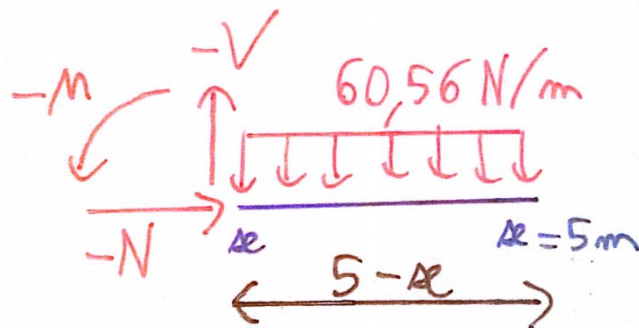
Puisque la section est constante, le poids propre est une charge répartie rectangulaire



Telle que :

$$p = 8000 \times 10 \times \frac{7,57}{100^2} = 60,56 \text{ N/m}$$

En effectuant une coupure en conservant la partie droite :

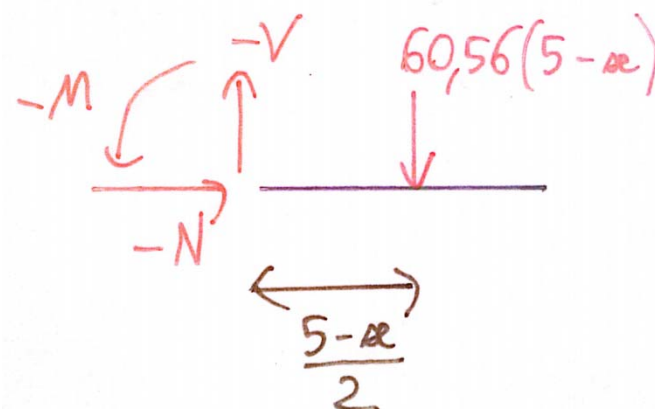


La force répartie est équivalente à une force ponctuelle :

$$60,56(5 - x)$$

Positionnée au milieu de la force répartie, c'est-à-dire à $\frac{5-x}{2}$ à droite de la coupure

Est statiquement équivalent à



$$-M - 60,56 \times (5 - x) \times \frac{5 - x}{2}$$

$$\Leftrightarrow M = -30,28x^2 + 302,8x - 757$$

Ainsi, il vient que : $EI \frac{d^2f(x)}{dx^2} = 10,09x^3 - 151,4x^2 + 757x + A$

Et

$$EI f(x) = 2,52x^4 - 50,46x^3 + 378,5x^2 + Ax + B$$

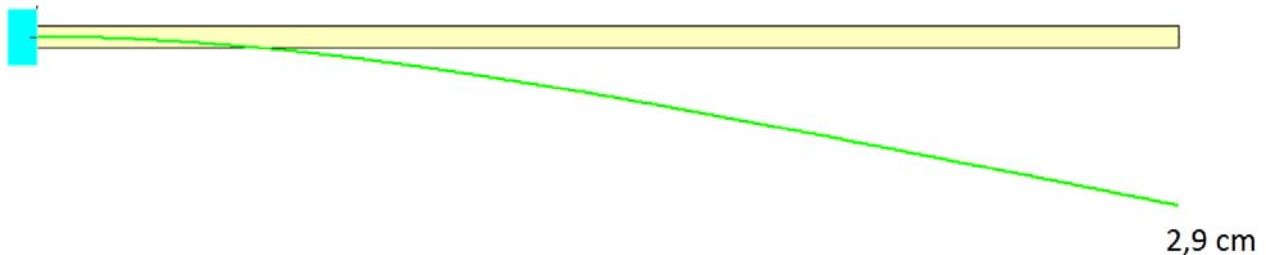
Or au niveau de l'encastrement : $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \frac{df(0)}{dx} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = 0$

Donc $EI f(x) = 2,52x^4 - 50,46x^3 + 378,5x^2$

Avec $EI = 210000 \cdot 10^6 \times 77,67 \cdot 10^{-8} = 163107$

Au final :

$$f_{max} = \frac{2,52 \times 5^4 - 50,46 \times 5^3 + 378,5 \times 5^2}{163107} = 0,029 \text{ m}$$



3.7.2 Solution 6

La première étape consiste à intégrer deux fois le moment fléchissant.

En posant A, B, C et D des constantes, il vient que :

Pour $0 < x < 5$	$M(x) = -500x^2 + 2100x$ $EI \frac{df(x)}{dx} = 166,67x^3 - 1050x^2 + A$ $EI f(x) = 41,67x^4 - 350x^3 + Ax + B$
Pour $5 < x < 7$	$M(x) = -500x^2 + 7000x - 24500$ $EI \frac{df(x)}{dx} = 166,67x^3 - 3500x^2 + 24500x + C$ $EI f(x) = 41,67x^4 - 1166,67x^3 + 12250x^2 + Cx + D$

Les flèches sont nulles au niveau des appuis donc :

- $EI f(0) = 41,67 \times 0^4 - 350 \times 0^3 + A \times 0 + B$
 $\Leftrightarrow \boxed{B = 0}$
- $EI f(5) = 41,67 \times 5^4 - 350 \times 5^3 + A \times 5 + B = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{5A + B = 17706,25}$
- $EI f(5) = 41,67 \times 5^4 - 1166,67 \times 5^3 + 12250 \times 5^2 + C \times 5 + D$
 $\Leftrightarrow \boxed{5C + D = -186460}$

La dérivée de la flèche est continue :

- $\frac{df(5^-)}{dx} = \frac{df(5^+)}{dx}$
 $\Leftrightarrow 166,67 \times 5^3 - 1050 \times 5^2 + A = 166,67 \times 5^3 - 3500 \times 5^2 + 24500 \times 5 + C$

$$\Leftrightarrow A - C = 61250$$

Nous obtenons un système qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17706,25 \\ -186460 \\ 61250 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3541,25 \\ -57708,75 \\ 102083,75 \end{pmatrix}$$

D'où

Pour $0 < x < 5$	$EI \frac{df(x)}{dx} = 166,67x^3 - 1050x^2 + 3541,25$
Pour $5 < x < 7$	$EI \frac{df(x)}{dx} = 166,67x^3 - 3500x^2 + 24500x - 57708,75$

Avec $EI = 30000 \cdot 10^6 \times 10455 \cdot 10^{-8} = 3136500$

D'où les rotations

- au niveau du nœud 1 : $R_1 = \frac{3541,25}{3136500} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$
- au niveau du nœud 2 : $R_2 = \frac{166,67 \times 5^3 - 1050 \times 5^2 + 3541,25}{3136500} = -5,98 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$
- au niveau du nœud 3 : $R_3 = \frac{166,67 \times 7^3 - 3500 \times 7^2 + 24500 \times 7 - 57708,75}{3136500} = -1,72 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$

3.7.3 Solution 7

La première étape consiste à intégrer deux fois le moment fléchissant.

En posant A, B, C, D, E, F, G et H des constantes, il vient que :

Pour $0 < x < 2$	$M(x) = 295443 \cdot x - 413108$ $EI \frac{df(x)}{dx} = -147721,5x^2 + 413108x + A$ $EIf(x) = -49240,5x^3 + 206554x^2 + Ax + B$
Pour $2 < x < 6$	$M(x) = 186892 - 4557 \cdot x$ $EI \frac{df(x)}{dx} = 2278,5x^2 - 186892x + C$ $EIf(x) = 759,5x^3 - 206554x^2 + Cx + D$
Pour $6 \text{ m} < x < 9 \text{ m}$	$M(x) = -500x^2 - 445683x + 2851650$ $EI \frac{df(x)}{dx} = 166,7x^3 + 222841,5x^2 - 2851650x + E$ $EIf(x) = 41,7x^4 + 74280,5x^3 - 1425825x^2 + Ex + F$
Pour $9 \text{ m} < x < 15 \text{ m}$	$M(x) = -3000000 + 200000x$ $EI \frac{df(x)}{dx} = -100000x^2 + 3000000x + G$ $EIf(x) = -33333,3x^3 + 1500000x^2 + Gx + H$

Les flèches sont nulles au niveau des appuis donc :

- $EIf(0) = -49240,5 \times 0^3 + 206554 \times 0^2 + A \times 0 + B$
 $\Leftrightarrow \boxed{B = 0}$
- $EIf(6) = 759,5 \times 6^3 - 206554 \times 6^2 + C \times 6 + D = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{6C + D = 7271892}$
- $EIf(6) = 41,7 \times 6^4 + 74280,5 \times 6^3 - 1425825 \times 6^2 + E \times 6 + F = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{6E + F = 35231069}$
- $EIf(9) = 41,7 \times 9^4 + 74280,5 \times 9^3 - 1425825 \times 9^2 + E \times 9 + F = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{9E + F = 61067747}$
- $EIf(9) = -33333,3 \times 9^3 + 1500000 \times 9^2 + G \times 9 + H = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{9G + H = -97200024}$

La dérivée de la flèche est nulle au niveau de l'encastrement :

- $EI \frac{df(0)}{dx} = -147721,5 \times 0^2 + 413108 \times 0 + A = 0$
 $\Leftrightarrow \boxed{A = 0}$

La flèche est continue :

- $f(2^-) = f(2^+)$
 $\Leftrightarrow -49240,5 \times 2^3 + 206554 \times 2^2 + A \times 2 + B = 759,5 \times 2^3 - 206554 \times 2^2 + C \times 2 + D$
 $\Leftrightarrow 2C + D = 1252432$

La dérivée de la flèche est continue :

- $\frac{df(9^-)}{dx} = \frac{df(9^+)}{dx}$
 $\Leftrightarrow 166,7 \times 9^3 + 222841,5 \times 9^2 - 2851650 \times 9 + E = -100000 \times 9^2 + 3000000 \times 9 + G$
 $\Leftrightarrow \boxed{E - G = 26393164}$

Elle est également continue aux abscisses $x=2m$ et $x=6m$, mais nous avons déjà suffisamment d'équations permettant de résoudre le système qui peut se mettre sous la forme :

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7271892 \\ 35231069 \\ 61067747 \\ -97200024 \\ 1252432 \\ 26393164 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1504865 \\ -1757298 \\ 8612226 \\ -16442287 \\ -17780938 \\ 62828418 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

Pour $0 < x < 2$	$EIf(x) = -49240,5x^3 + 206554x^2$
Pour $2 < x < 6$	$EIf(x) = 759,5x^3 - 206554x^2 + 1504865x - 1757298$
Pour $6 m < x < 9 m$	$EIf(x) = 41,7x^4 + 74280,5x^3 - 1425825x^2 + 8612226x - 16442287$
Pour $9 m < x < 15 m$	$EIf(x) = -33333,3x^3 + 1500000x^2 - 17780938x + 62828418$

Avec

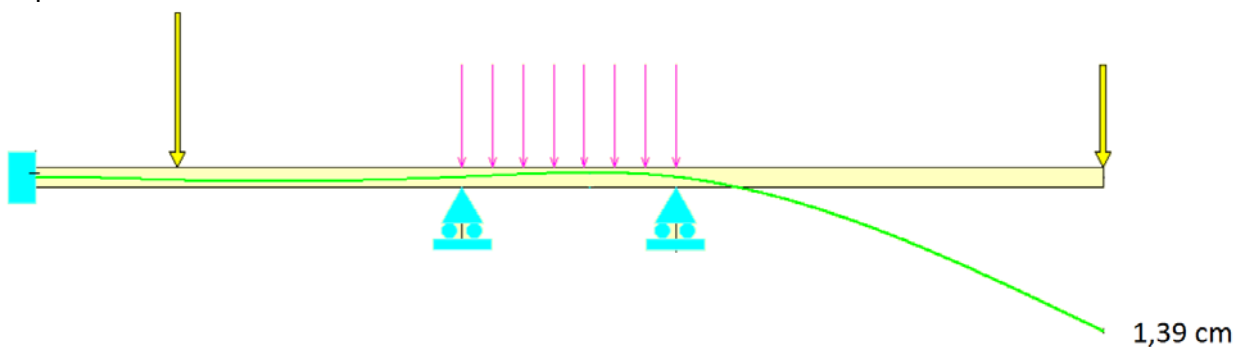
$$EI = 210000 \cdot 10^6 \times 722299 \cdot 10^{-8} = 1516827900$$

La flèche maximale se situe à l'abscisse $x = 15 m$:

$$f_{max} = f(15) = \frac{-33333,3 \times 15^3 + 1500000 \times 15^2 - 17780938 \times 15 + 62828418}{1516827900} = 0,0139 m$$

$$\Leftrightarrow f_{max} = 1,39 cm$$

La représentation de la flèche est :



4. Méthode des forces

4.1 Premier principe de la thermodynamique

Pour un système fermé :

$$\Delta U + \Delta K = W + Q$$

Avec :

- U : énergie interne
- K : énergie cinétique (macroscopique)
- W : travail des forces
- Q : chaleur reçue

Ainsi, dans le cadre de la RDM :

- les effets thermiques ne sont pas pris en compte,
- l'énergie globale est constante,
- la structure reste statique.

Il vient alors que la somme du travail des forces extérieures et des forces intérieures est nulle :

$$W_{int} + W_{ext} = 0$$

Remarque :

Cette équation est parfois appelée l'égalité de Clapeyron.

4.2 Notion de travail

4.2.1 Travail d'une force

Le travail d'une force $\vec{F}$ dont le point d'application se déplace de $\vec{u}$ est égal à :

$$W_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{u} = F \cdot u \cdot \cos \theta$$

Avec θ l'angle entre les directions qui portent les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{u}$.

Dans le cadre de ce cours, le déplacement considéré est généralement colinéaire à la force, ainsi :

$$W_{\vec{F}} = F \cdot u$$

4.2.2 Travail d'un moment

Le travail d'un moment M (considéré constant) se déplaçant d'un angle ω est égal à :

$$W_M = M \cdot \omega$$

4.3 Travail des forces extérieures

Dans un champ de déplacement donné (incluant des rotations), le travail des forces extérieures est égal à :

$$W_{F_{ext}} = \sum_{i=1}^n (F_i \cdot u_i + M_i \cdot \omega_i)$$

4.4 Travail des forces intérieures

En posant :

- N l'effort normal et ε la déformation longitudinale
- M le moment fléchissant et χ la courbure
- V l'effort normal et γ la déformation de cisaillement

Le travail des forces internes (en négligeant l'effet de la torsion) est égal à :

$$W_{int} = - \int_{structure} N \cdot \varepsilon + M \cdot \chi + V \cdot \gamma$$

Or

$$\varepsilon = \frac{N}{ES}$$

$$\chi = \frac{M}{EI}$$

$$\gamma = \frac{V}{G \cdot A_y}$$

Avec A_y la section réduite pour l'effort tranchant égale à :

$$A_y = \frac{I_z^2}{\int_{section} \frac{S_z^2(y)}{b(y)} dy}$$

Et G le module d'élasticité transversal égal à :

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$$

Cas particulier :

Lorsque les travaux de l'effort normal et de l'effort tranchant peuvent être négligés devant le travail du moment fléchissant, ainsi il vient que :

$$W_{int} \approx - \int_{structure} \frac{M^2}{EI}$$

4.5 Théorème de réciprocité de Maxwell-Betty

Théorème

En considérant deux systèmes de chargement S_1 et S_2 .

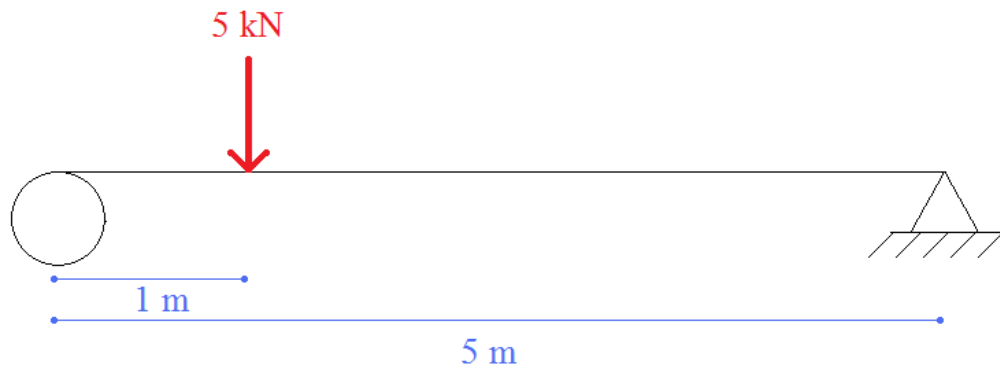
Le système S_1 (resp. S_2) a pour conséquence un champ de déplacement u_1 (resp. u_2).

Le travail produit par le chargement S_1 dans le champ de déplacement u_2 est égal au travail produit par le chargement S_2 dans le champ de déplacement u_1 .

Illustration du théorème

Soit une structure de moment d'inertie égal à $0,01 \text{ m}^4$ et de module du Young égal à 12000 MPa .

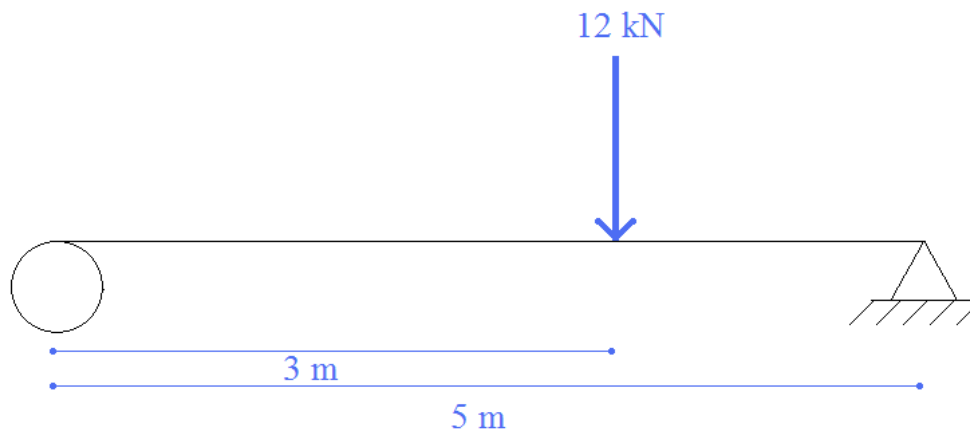
Système S_1



D'après le formulaire des poutres bi-appuyées en annexes de ce cours, la flèche à 3 mètres de l'appui gauche (au niveau de la force appliquée dans le système S_2) est égale à :

$$-\frac{5000 \times 1 \times (5 - 3)}{6 \times 12000000000 \times 0,01 \times 5} [3 \times (2 \times 5 - 3) - 1^2] \approx -5,56 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Système S_2



D'après le formulaire des poutres bi-appuyées en annexes de ce cours, la flèche à 1 mètre de l'appui gauche (au niveau de la force appliquée dans le système S_1) est égale à :

$$-\frac{12000 \times 2 \times 1}{6 \times 12000000000 \times 0,01 \times 5} (5^2 - 2^2 - 1^2) \approx -1,33 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Travail des forces de S_1 dans le champ de déplacement de S_2

$$5000 \times 1,33 \cdot 10^{-4} = 0,67 \text{ J}$$

Travail des forces de S_2 dans le champ de déplacement de S_1

$$12000 \times 5,56 \cdot 10^{-5} = 0,67 \text{ J}$$

Le théorème de réciprocité de Maxwell-Betty est bien vérifié dans cet exemple.

4.6 Principe des travaux virtuels (PTV)

En posant u^* un champ de déplacement virtuel ; u^* est pris tel que :

- respecte les conditions de liaisons (cinématiquement admissible – CA)
- est continu
- est dérivable
- existe

Principe des travaux virtuels

La somme du travail des forces extérieures et des forces intérieures calculée dans un champ de déplacement virtuel est nulle :

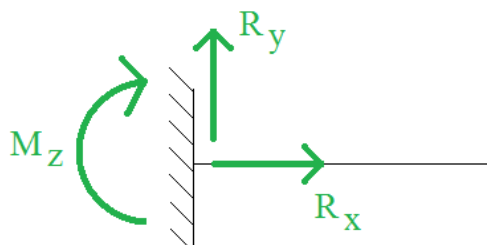
$$W^*_{ext} + W^*_{int} = 0$$

4.7 Ajouter des degrés de liberté et un effort unitaire associé

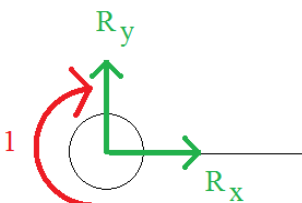
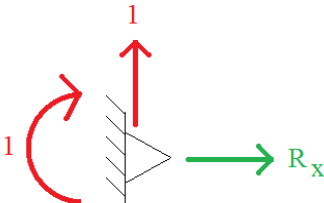
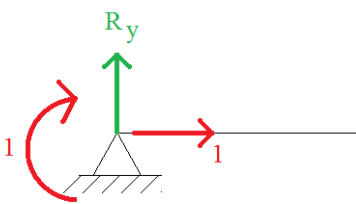
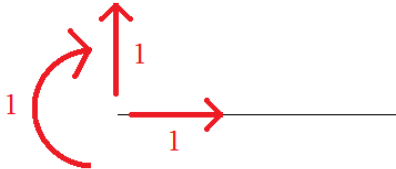
Par la suite :

- Les réactions d'appuis sont en vert
- Les efforts unitaires suite à la libération d'un degré de liberté sont en rouge.

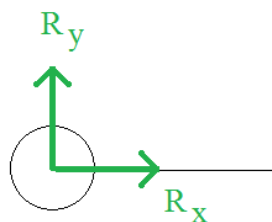
4.7.1 Au niveau d'un encastrement



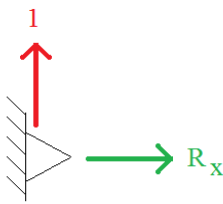
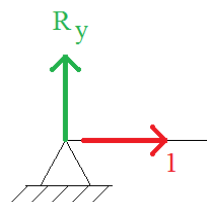
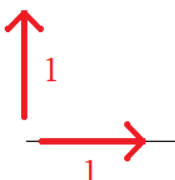
Il est possible de libérer (en 2D) :

La rotation		1 degré de liberté ajouté
La rotation et la force verticale		2 degrés de liberté ajoutés
La rotation et la force horizontale		2 degrés de liberté ajoutés
La rotation et les forces horizontale et verticale		3 degrés de liberté ajoutés

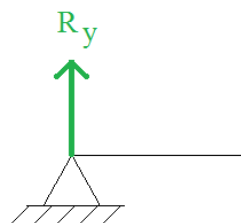
4.7.2 Au niveau d'une rotule



Il est possible de libérer (en 2D) :

La force verticale		1 degré de liberté ajouté
La force horizontale		1 degré de liberté ajouté
Les forces horizontale et verticale		2 degrés de liberté ajoutés

4.7.3 Au niveau d'un appui simple

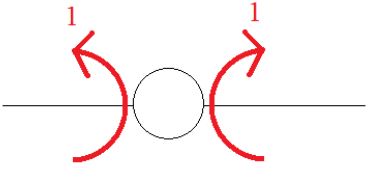
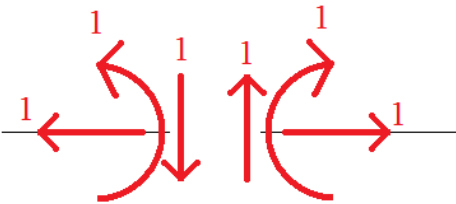


Il est possible de libérer (en 2D) :

La force verticale		1 degré de liberté ajouté
--------------------	---	---------------------------

4.7.4 A l'intérieur d'une structure

Il est possible de libérer (en 2D) en un point quelconque :

La rotation		1 degré de liberté ajouté
La rotation, l'effort normal et l'effort tranchant		3 degrés de liberté ajoutés

4.8 Méthode

- I. On détermine le degré hyperstatique de la structure h .
- II. On supprime suffisamment d'hyperstaticité pour se ramener à un cas isostatique en ajoutant h degrés de liberté (soit au niveau des appuis, soit en créant des rotules internes).
- III. Cette « nouvelle » structure avec le chargement réel est appelée structure isostatique associée (notée S_0) pour laquelle on calcule le moment fléchissant en tout point. Cette solution concernant les moments est appelée M_0 .
- IV. Pour chaque degré de liberté ajouté i précédemment, on calcule les moments fléchissants avec la structure isostatique associée avec pour chargement un effort unitaire en adéquation avec le degré de liberté ajouté. La valeur réelle de l'effort associé à ce degré de liberté est noté X_i et les moments fléchissants sont notés M_i .
- V. On résout le système d'équation de degré h suivant :

$$\begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{h1} & \cdots & \delta_{hh} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{01} \\ \vdots \\ \delta_{0h} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque les déformations d'effort normal et d'effort tranchant peuvent être négligées :

$$\delta_{ij} = \int_{(S)} \frac{M_i M_j}{EI}$$

et

$$\delta_{0i} = \int_{(S)} \frac{M_0 M_i}{EI}$$

Remarques :

- 1) Lorsque les déformations d'effort normal et d'effort tranchant ne peuvent pas être négligées (treillis par exemple), les termes sont égaux à :

$$\delta_{ij} = \int_{(S)} \frac{M_i M_j}{EI} + \frac{N_i N_j}{ES} + \frac{V_i V_j}{GA_y}$$

et

$$\delta_{0i} = \int_{(S)} \frac{M_0 M_i}{EI} + \frac{N_0 N_i}{ES} + \frac{V_0 V_i}{GA_y}$$

2) La matrice $\begin{pmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{1h} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{h1} & \cdots & \delta_{hh} \end{pmatrix}$ est appelée matrice de souplesse.

4.9 Intégrales de Mohr⁴

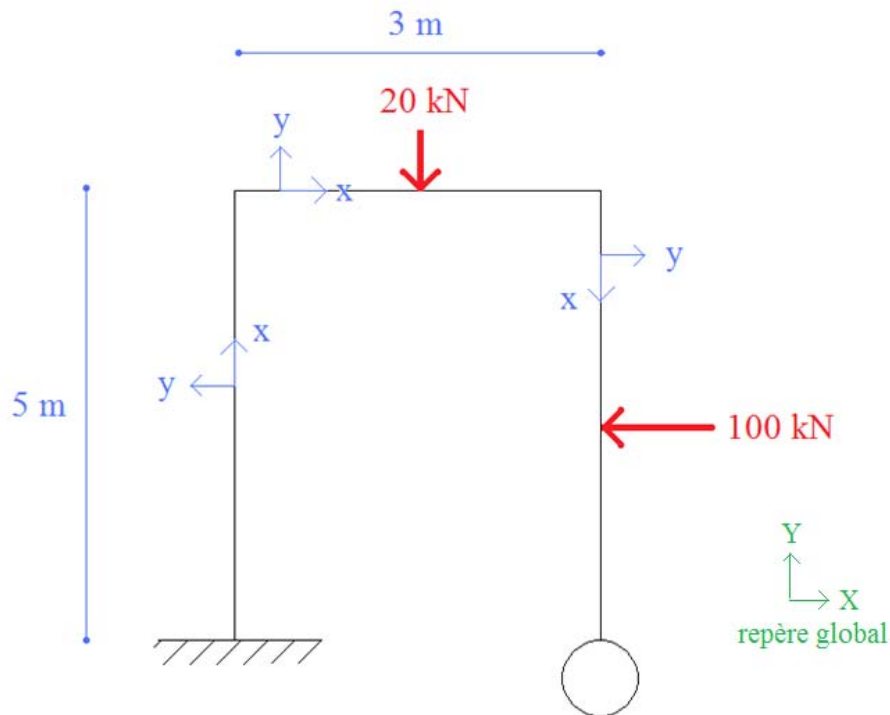
Il est indispensable de calculer des termes du type $\int_{(S)} M_i M_j$. Pour cela, il est possible, dans la majorité des cas rencontrés, d'utiliser les intégrales de Mohr.

Tableau des intégrales de MOHR : $\int_0 M_i(x) M_j(x) dx = X M_i M_j L$ avec **X** : valeur lue dans le tableau

⁴ Extrait du cours de RDM2 de l'ENTPE (J.-Y. COLLIN)

4.10 Exemple

Déterminer les réactions d'appuis.



Toutes les sections ont même moment d'inertie et même module de Young.

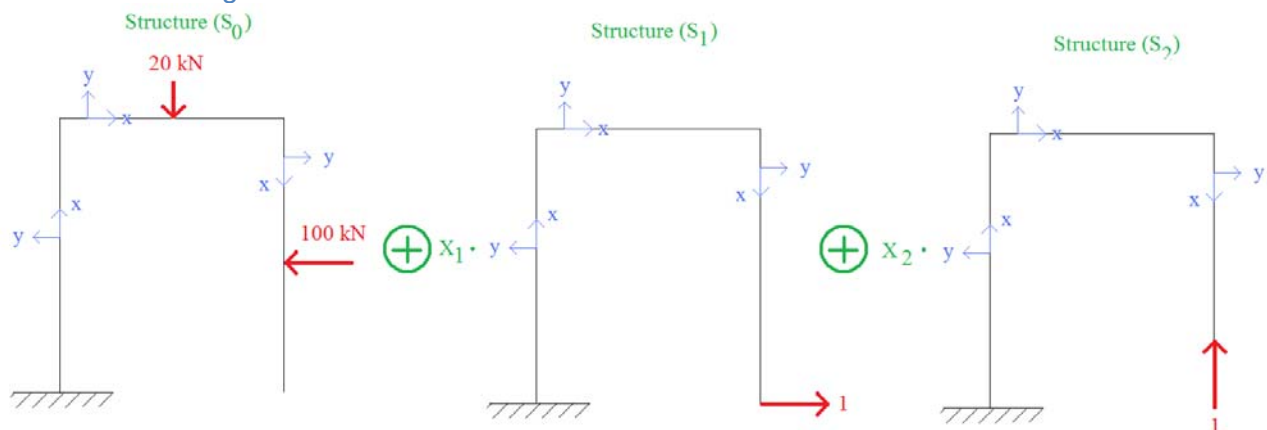
Solution

La structure est hyperstatique de degré 2.

Supprimons l'appui rotule pour ajouter deux degrés de liberté et ainsi obtenir une structure isostatique associée.

Remarque : d'autres choix pourraient être faits et conduiraient à la même solution.

La structure est égale à :



On peut également noter :

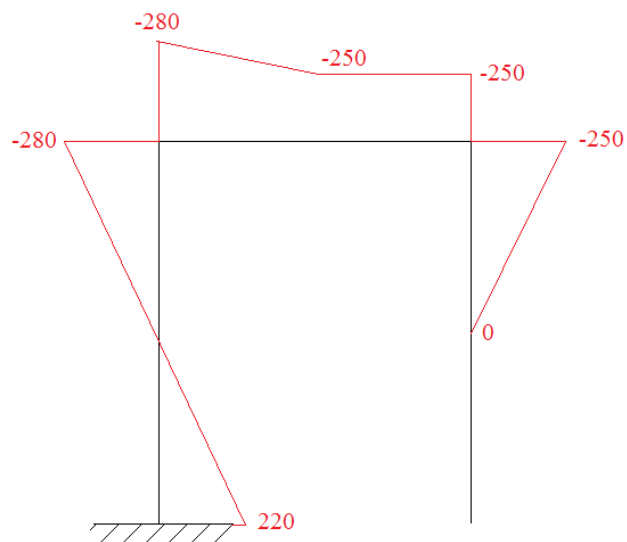
$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2$$

Avec

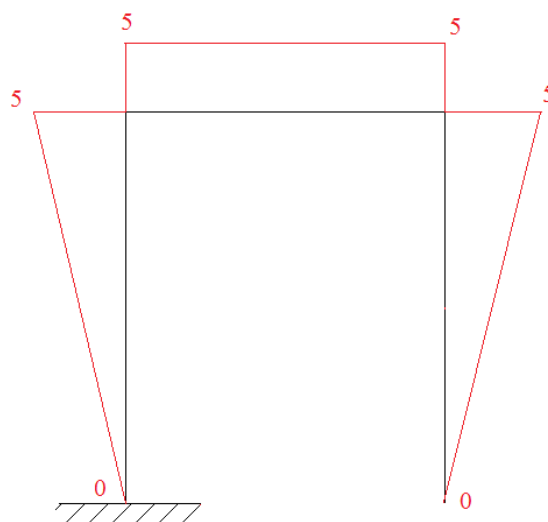
- X_1 la réaction d'appui horizontale au niveau de la rotule
- X_2 la réaction d'appui verticale au niveau de la rotule

Diagrammes de moments fléchissants :

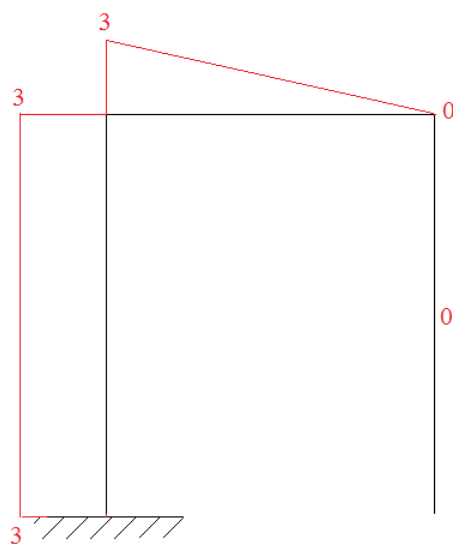
Structure S₀



Structure S₁

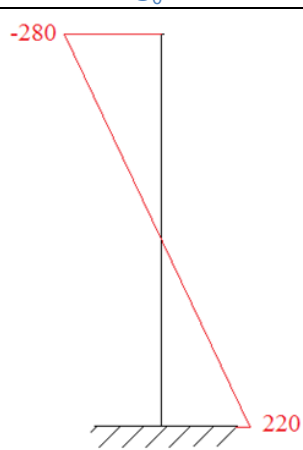
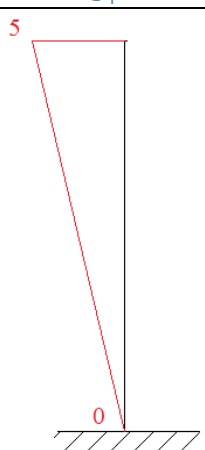
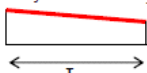
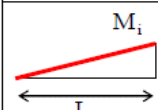
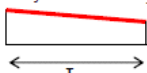
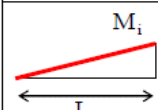
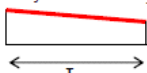
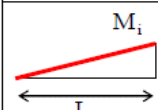


Structure S₂

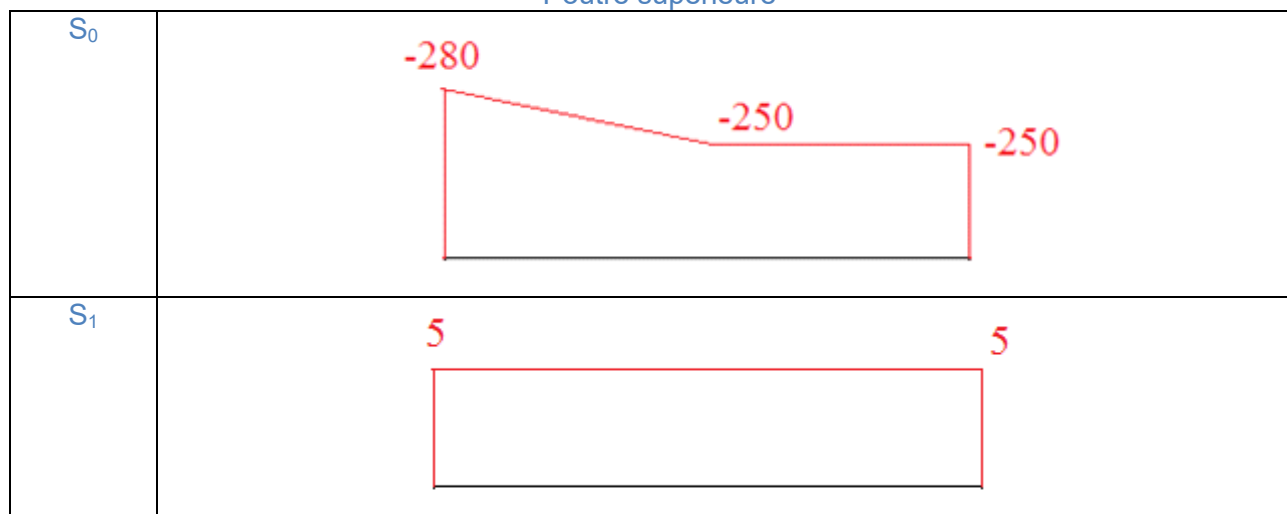


Calcul de $EI\delta_{01} = \int_{(S)} M_0 M_1$

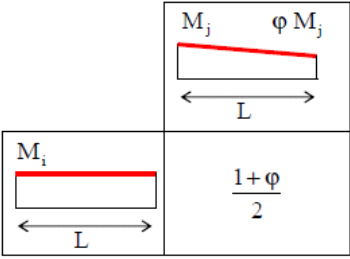
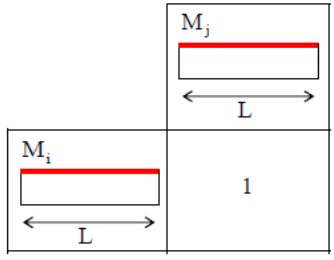
Poteau de gauche

S_0	S_1	Intégrales de Mohr										
		<table><tr><td>M_j</td><td>φM_j</td></tr><tr><td colspan="2"></td></tr><tr><td colspan="2">$\longleftrightarrow L$</td></tr><tr><td></td><td>$\frac{1+2\varphi}{6}$</td></tr><tr><td colspan="2">$\longleftrightarrow L$</td></tr></table>	M_j	φM_j			$\longleftrightarrow L$			$\frac{1+2\varphi}{6}$	$\longleftrightarrow L$	
M_j	φM_j											
												
$\longleftrightarrow L$												
	$\frac{1+2\varphi}{6}$											
$\longleftrightarrow L$												
Avec : • $L = 5 \text{ m}$ • $M_i = 5 \text{ kN.m}$ • $M_j = 220 \text{ kN.m}$ • $\varphi \cdot M_j = -280 \text{ kN.m} \Rightarrow \varphi \approx -1,27$ Donc $\int_{(S)} M_0 M_1 \approx \frac{1 + 2 \times (-1,27)}{6} \times 5 \times 220 \times 5$ ≈ -1412												

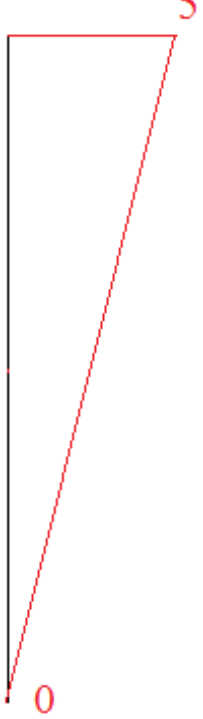
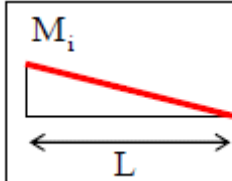
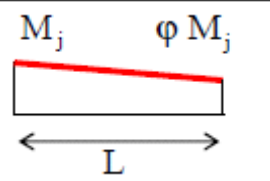
Poutre supérieure



Intégrales de Mohr

$x \in [0; 1,5]$	 Avec : $L = 1,5 \text{ m}$ $M_i = 5 \text{ kN.m}$ $M_j = -280 \text{ kN.m}$ $\varphi \cdot M_j = -250 \text{ kN.m} \Rightarrow \varphi \approx 0,89$ Donc $\int_{(S)} M_0 M_1 \approx \frac{1 + 0,89}{2} \times 5 \times (-280) \times 1,5 \approx -1985$
$x \in [1,5; 3]$	 Avec : $L = 1,5 \text{ m}$ $M_i = 5 \text{ kN.m}$ $M_j = -250 \text{ kN.m}$ Donc $\int_{(S)} M_0 M_1 \approx 5 \times (-250) \times 1,5 \approx -1875$

Poteau de droite

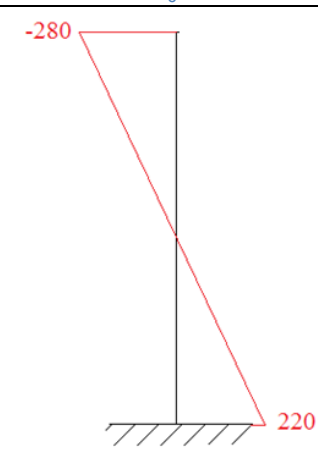
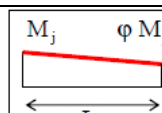
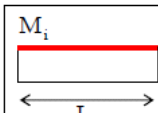
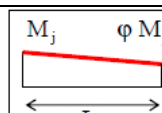
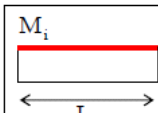
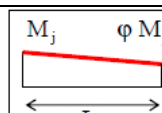
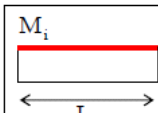
S_0	S_1	Intégrales de Mohr
		Remarque : le calcul est réalisé que pour $x \in [0 ; 2,5]$ puisque pour $x \in [2,5 ; 5]$, la valeur de l'intégrale est nulle.  M_i L  M_j φM_j L $\frac{2 + \varphi}{6}$ Avec : • $L = 2,5 \text{ m}$ • $M_i = -250 \text{ kN.m}$ • $M_j = 5 \text{ kN.m}$ • $\varphi \cdot M_j = 2,5 \text{ kN.m} \Rightarrow \varphi = 0,5$ Donc $\int_{(S)} M_0 M_1 = \frac{2 + 0,5}{6} \times (-250) \times 5 \times 2,5 \approx -1302$

Ainsi,

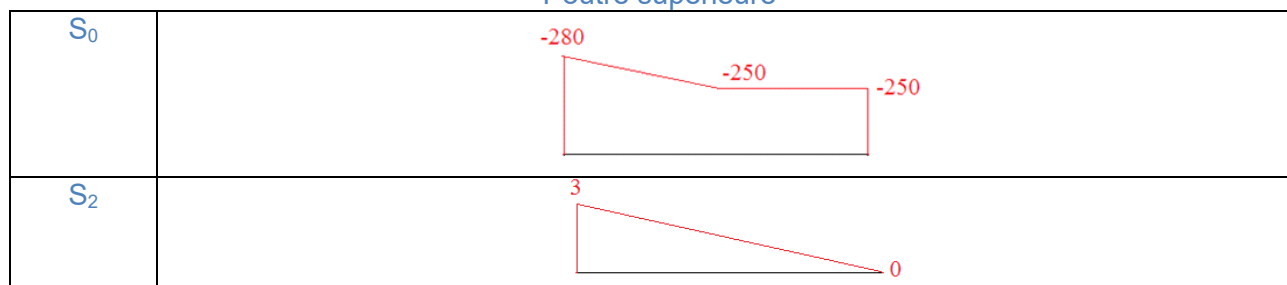
$$EI\delta_{01} = \int_{(S)} M_0 M_1 \approx -1412 - 1985 - 1875 - 1302 \approx -6574$$

Calcul de $EI\delta_{02} = \int_{(S)} M_0 M_2$

Poteau de gauche

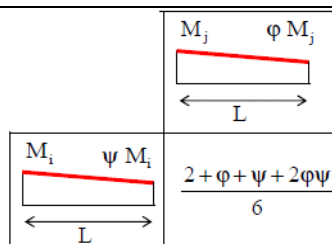
S_0	S_2	Intégrales de Mohr				
		<table><tr><td></td><td>$\frac{1+\varphi}{2}$</td></tr><tr><td></td><td>$\frac{1+\varphi}{2}$</td></tr></table> Avec : • $L = 5 \text{ m}$ • $M_i = 3 \text{ kN.m}$ • $M_j = 220 \text{ kN.m}$ • $\varphi \cdot M_j = -280 \text{ kN.m} \Rightarrow \varphi \approx -1,27$ Donc $\int_{(S)} M_0 M_2 \approx \frac{1 - 1,27}{2} \times 3 \times 220 \times 5 \approx -446$		$\frac{1+\varphi}{2}$		$\frac{1+\varphi}{2}$
	$\frac{1+\varphi}{2}$					
	$\frac{1+\varphi}{2}$					

Poutre supérieure



Intégrales de Mohr

$x \in [0; 1,5]$



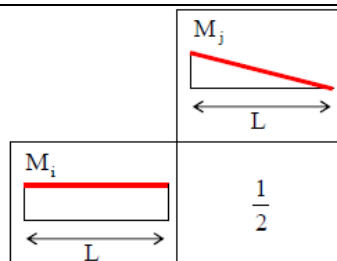
Avec :

- $L = 1,5 \text{ m}$
- $M_i = 3 \text{ kN.m}$
- $\psi \cdot M_j = 1,5 \text{ kN.m} \Rightarrow \psi = 0,5$
- $M_j = -280 \text{ kN.m}$
- $\varphi \cdot M_j = -250 \text{ kN.m} \Rightarrow \varphi \approx 0,89$

Donc

$$\int_{(S)} M_0 M_2 \approx \frac{2 + 0,89 + 0,5 + 2 \times 0,89 \times 0,5}{6} \times 3 \times (-280) \times 1,5 \approx -899$$

$x \in [1,5; 3]$



Avec :

- $L = 1,5 \text{ m}$
- $M_i = -250 \text{ kN.m}$
- $M_j = 1,5 \text{ kN.m}$

Donc

$$\int_{(S)} M_0 M_2 \approx \frac{1}{2} \times 1,5 \times (-250) \times 1,5 \approx -281$$

Poteau de droite

S_0	S_2	Intégrales de Mohr
		$\int_{(S)} M_0 M_2 = 0$

Ainsi,

$$EI\delta_{02} = \int_{(S)} M_0 M_1 \approx -446 - 899 - 281 + 0 \approx -1626$$

Les calculs suivants (moins détaillés) donnent les résultats suivants :

$$EI\delta_{11} = \int_{(S)} M_1 M_1 \approx 158$$

$$EI\delta_{12} = \int_{(S)} M_1 M_2 = 60$$

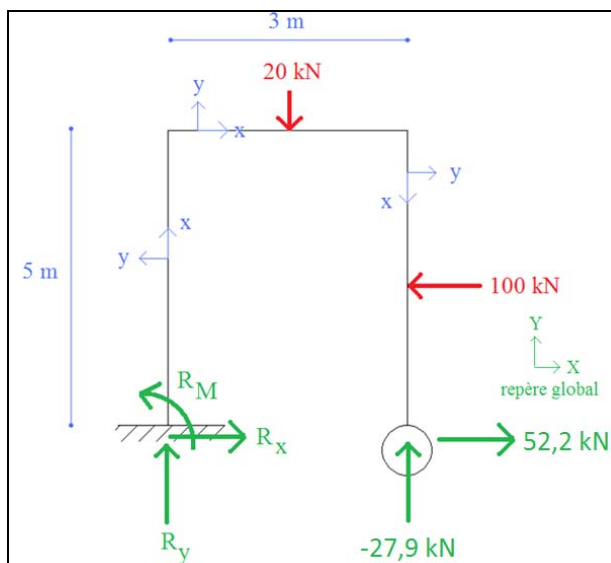
$$EI\delta_{22} = \int_{(S)} M_2 M_2 = 54$$

Le système suivant est ainsi obtenu :

$$\begin{pmatrix} \frac{158}{EI} & \frac{60}{EI} \\ \frac{60}{EI} & \frac{54}{EI} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-6574}{EI} \\ \frac{-1626}{EI} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 158 & 60 \\ 60 & 54 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6574 \\ -1626 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 52,2 \text{ kN} \\ X_2 = -27,9 \text{ kN} \end{cases}$$



L'équilibre des forces et des moments donne :

$$R_X + 52,2 - 100 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_X = 47,8 \text{ kN}}$$

$$R_Y - 27,9 - 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_Y = 47,9 \text{ kN}}$$

$$R_M - 27,9 \times 3 + 100 \times 2,5 - 20 \times 1,5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_M = -136,3 \text{ kN.m}}$$

Remarque :

Pour connaître les diagrammes de sollicitations, il est possible de déterminer les diagrammes de sollicitations pour les systèmes 0, 1 et 2 puis de les combiner tel que :

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 = \boxed{S_0 + 52,2 \cdot S_1 - 27,9 \cdot S_2}$$

Cette combinaison est également valable pour le moment fléchissant, l'effort normal, l'effort tranchant ou la flèche.

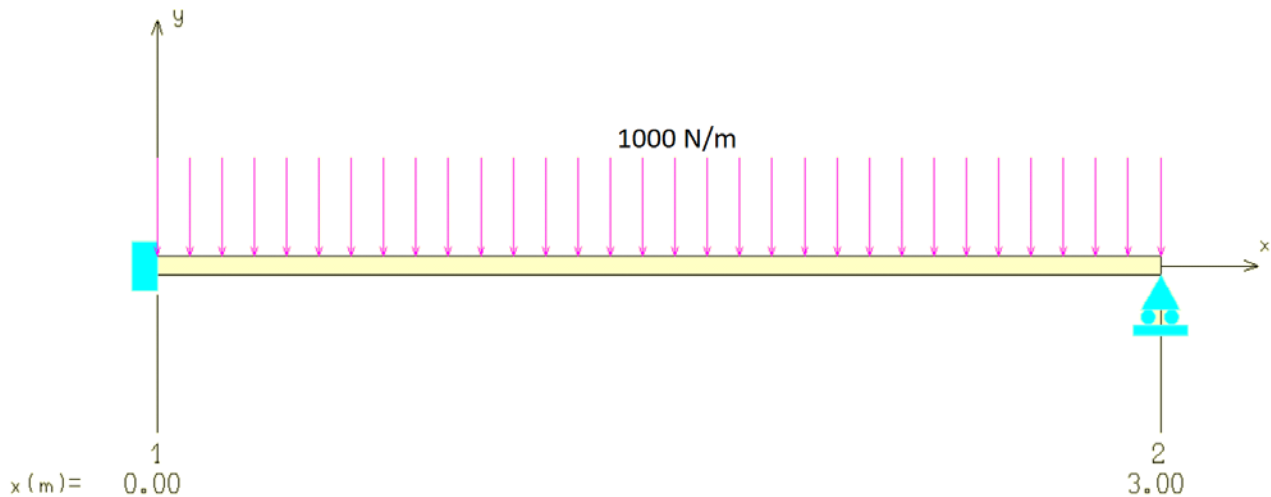
4.11 Exercices

Exercice 8

Déterminer les fonctions représentatives
de V et de M :

Extrait de solution

$$\left. \begin{aligned} V_{min} &= -1875 \text{ N.m} \\ M_{min} &= -1125 \text{ N.m} \end{aligned} \right\}$$

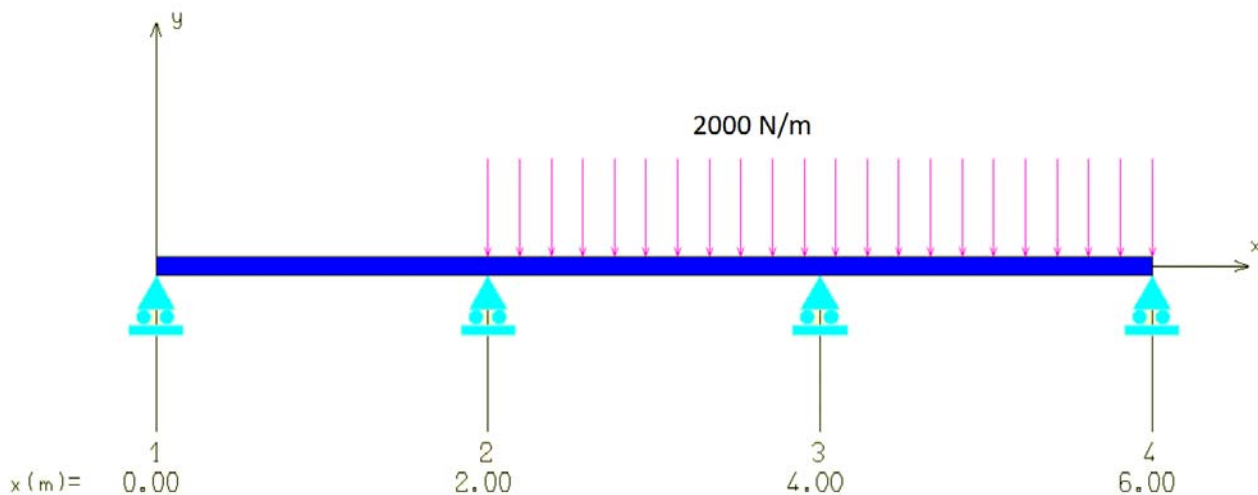


Exercice 9

Déterminer les fonctions représentatives
de V et de M :

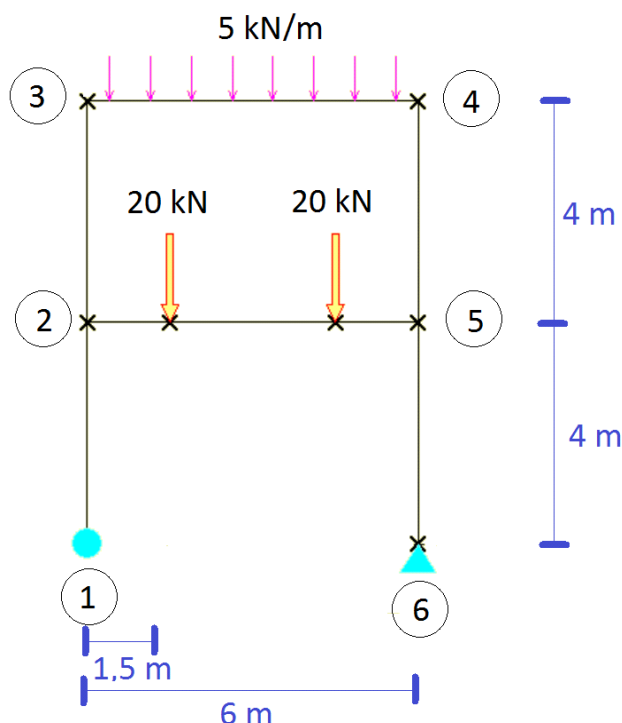
Extrait de solution

$$\left. \begin{aligned} M_{min} &\approx -933 \text{ N.m} \\ M_{max} &\approx 588 \text{ N.m} \end{aligned} \right\}$$



Exercice 10

Déterminer le moment maximal au niveau de la poutre 3-4.



4.12 Extraits d'annales

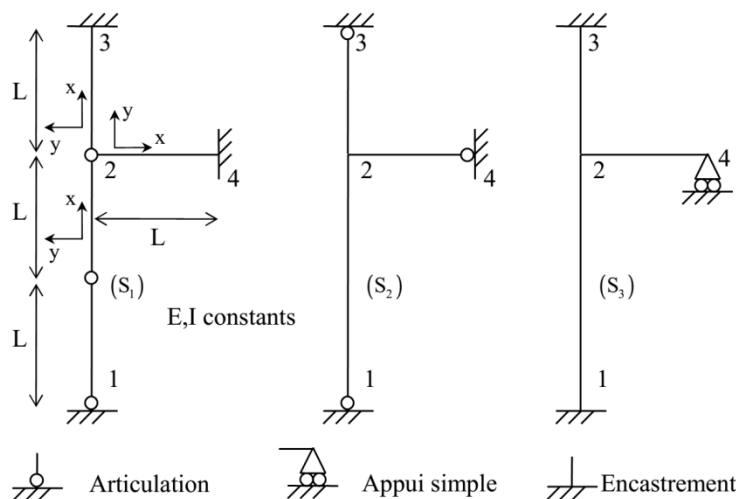
Exercice 11 : extrait des annales de novembre 2013

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour chacune des 3 structures suivantes, indiquez si possible :

Pour la méthode des forces :

- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place



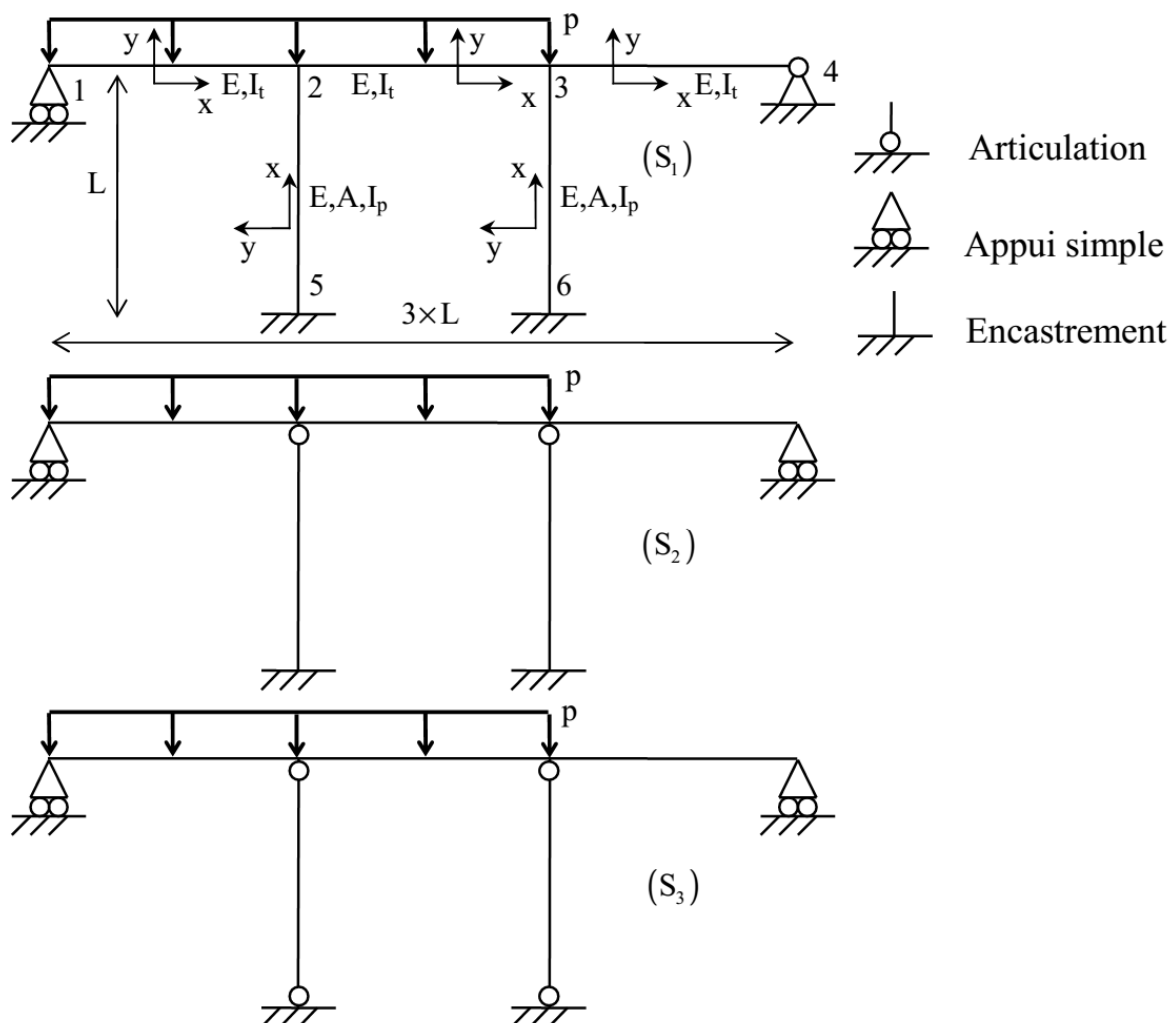
Exercice 12 : extrait des annales de décembre 2014

Partie I : Choix de résolution (3 pts)

Pour chacun des 3 problèmes suivants, indiquez si possible :

Pour la méthode des forces :

- Les inconnues hyperstatiques
- Une structure isostatique associée
- La définition des équations à mettre en place



4.13 Solutions

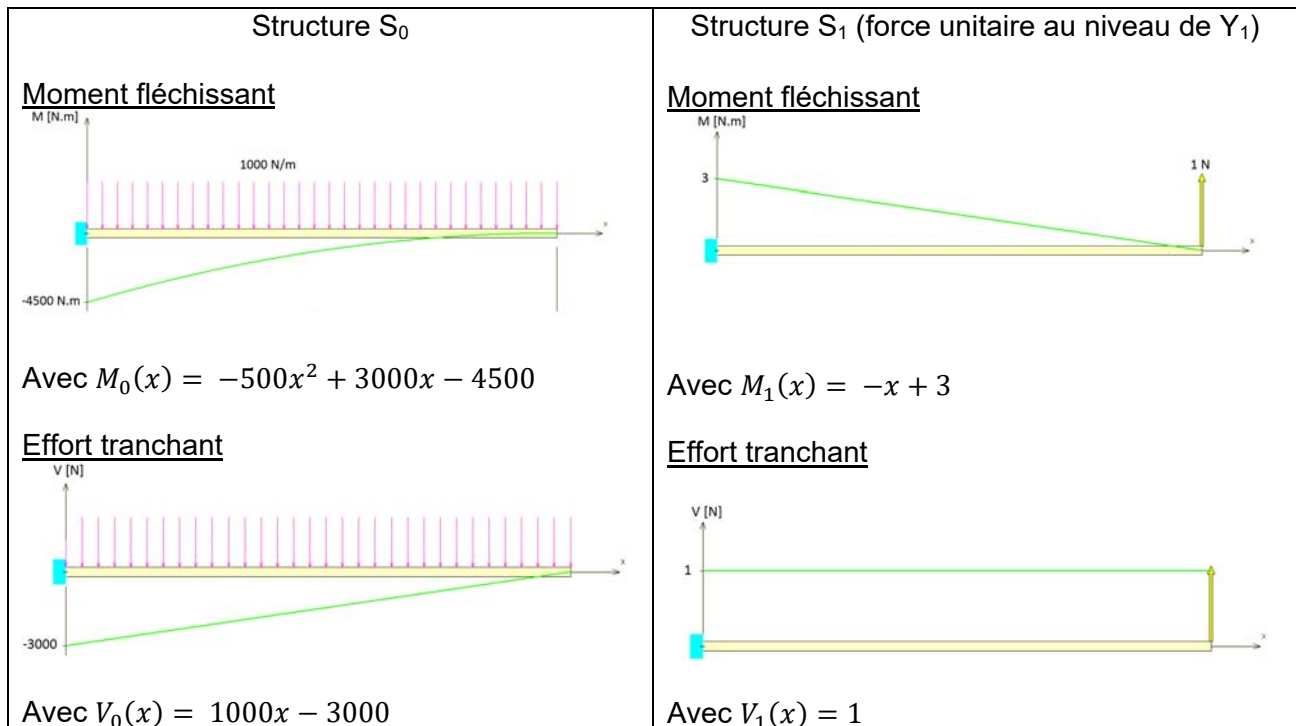
4.13.1 Solution 8

La structure est hyperstatique de degré 1.

« Supprimons » l'appui simple pour obtenir une structure isostatique associée et posons Y_1 la réaction d'appui au niveau de l'appui simple.

$$S = S_0 + Y_1 \cdot S_1$$

Les diagrammes associés sont :



Ensuite, si on néglige les déformations de l'effort tranchant et de l'effort normal devant celles du moment fléchissant :

- $EI\delta_{11} = \int_0^3 M_1 M_1 dx = \int_0^3 (-x + 3)^2 dx = 9$
- $EI\delta_{01} = \int_0^3 M_0 M_1 dx = \int_0^3 (-500x^2 + 3000x - 4500)(-x + 3) dx = -10125$

Remarque :

Il aurait été possible d'utiliser les intégrales de Mohr comme dans l'exemple du cours.

Il convient de résoudre le système suivant : $\delta_{11} \times Y_1 + \delta_{01} = 0$

$$\Leftrightarrow 9Y_1 - 10125 = 0$$

$$\Leftrightarrow Y_1 = 1125 \text{ N}$$

Puisque $S = S_0 + Y_1 \cdot S_1$

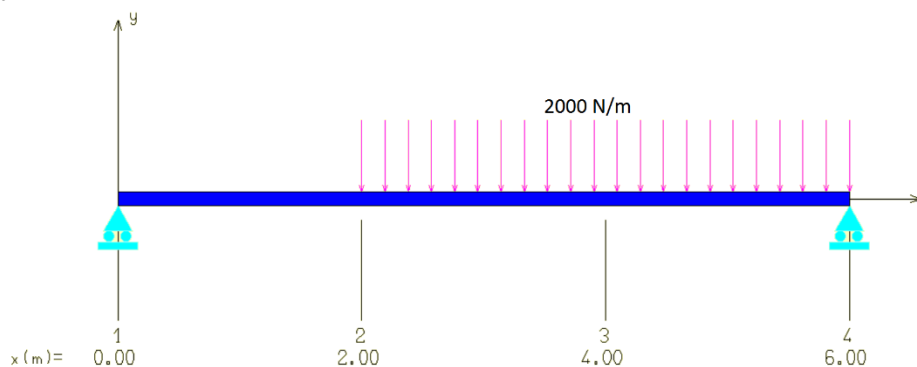
$$\text{Alors } \begin{cases} M(x) = M_0(x) + 1125M_1(x) = -500x^2 + 1875x - 1125 \\ V(x) = V_0(x) + 1125V_1(x) = 1000x - 1875 \end{cases}$$

4.13.2 Solution 9

La structure est hyperstatique de degré 2.

« Supprimons » les appuis simples au niveau des nœuds 2 et 3 pour obtenir une structure isostatique associée et posons Y_2 et Y_3 les réactions d'appui.

Structure S_0

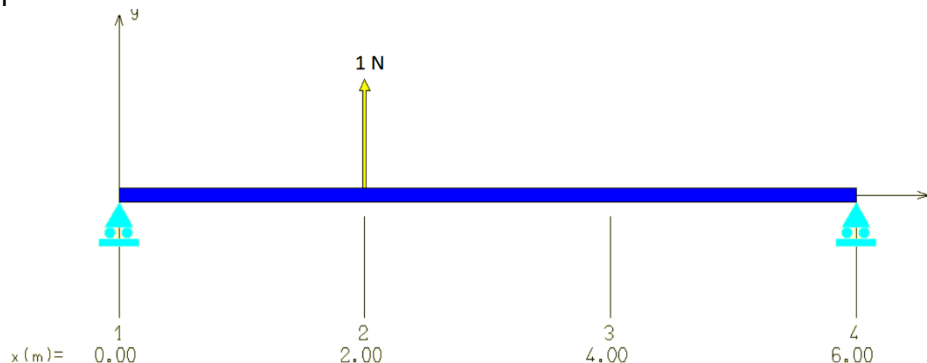


Moment fléchissant M_0

D'après les annexes :

$0 < x < 2$	$M_0(x) = 2667x$
$2 < x < 6$	$M_0(x) = -1000x^2 + 6667x - 4000$

Structure S_1

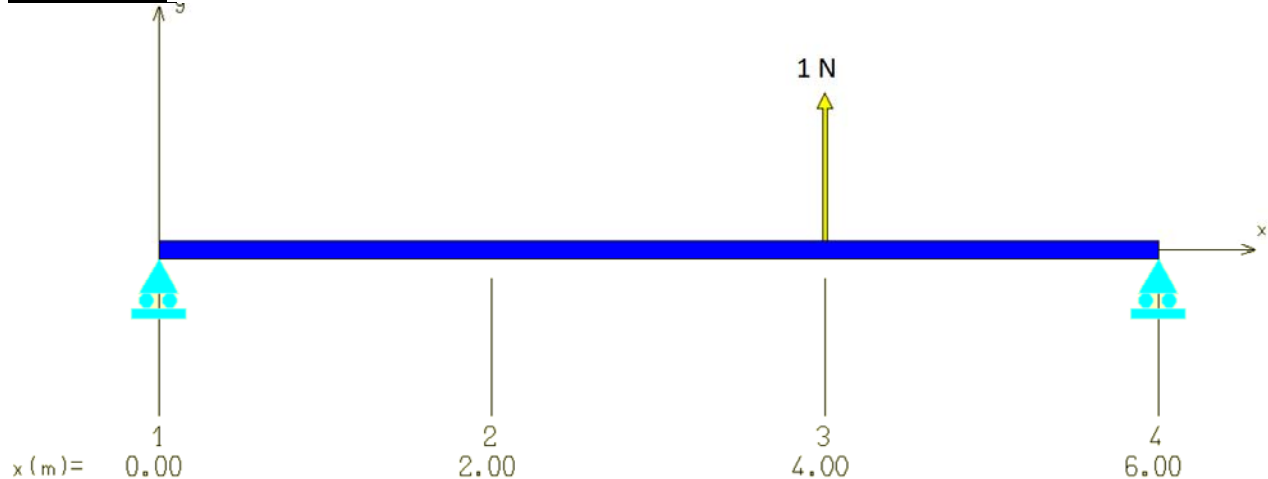


Moment fléchissant M_1

D'après les annexes :

$0 < x < 2$	$M_1(x) = -0,67x$
$2 < x < 6$	$M_1(x) = 0,33x - 2$

Structure S₂



Moment fléchissant M₂

D'après les annexes :

$0 < x < 4$	$M_2(x) = -0,33x$
$4 < x < 6$	$M_2(x) = 0,67x - 4$

En résumé :

	Structure S ₀	Structure S ₁	Structure S ₂
$0 < x < 2$	$M_0(x) = 2667x$	$M_1(x) = -0,67x$	$M_2(x) = -0,33x$
$2 < x < 4$	$M_0(x) = -1000x^2 + 6667x - 4000$	$M_1(x) = 0,33x - 2$	$M_2(x) = -0,33x$
$4 < x < 6$	$M_0(x) = -1000x^2 + 6667x - 4000$	$M_1(x) = 0,33x - 2$	$M_2(x) = 0,67x - 4$

Ensuite, si on néglige les déformations de l'effort tranchant et de l'effort normal devant celles du moment fléchissant :

$$EI\delta_{11} = \int_0^6 M_1 M_1 dx = \int_0^2 (-0,67x)^2 dx + \int_2^6 (0,33x - 2)^2 dx = 3,6275$$

$$EI\delta_{22} = \int_0^6 M_2 M_2 dx = \int_0^4 (-0,33x)^2 dx + \int_4^6 (0,67x - 4)^2 dx = 3,4674$$

$$EI\delta_{12} = \int_0^6 M_1 M_2 dx = \int_0^2 (-0,67x)(-0,33x) dx + \int_2^4 (0,33x - 2)(-0,33x) dx + \int_4^6 (0,33x - 2)(0,67x - 4) dx = 3,1192$$

$$EI\delta_{01} = \int_0^6 M_0 M_1 dx = \int_0^2 (2667x)(-0,67x) dx + \int_2^6 (-1000x^2 + 6667x - 4000)(0,33x - 2) dx = -21621$$

$$EI\delta_{02} = \int_0^6 M_0 M_2 dx = \int_0^2 (2667x)(-0,33x) dx + \int_2^4 (-1000x^2 + 6667x - 4000)(-0,33x) dx + \int_4^6 (-1000x^2 + 6667x - 4000)(0,67x - 4) dx = -22387$$

Remarque :

Il aurait été possible d'utiliser les intégrales de Mohr comme dans l'exemple du cours.

Il convient de résoudre l'équation suivante : $\begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{12} & \delta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta_{01} \\ \delta_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3,6275 & 3,1192 \\ 3,1192 & 3,4674 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -21621 \\ -22387 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,6275 & 3,1192 \\ 3,1192 & 3,4674 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 21621 \\ 22387 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1804 \text{ N} \\ 4833 \text{ N} \end{pmatrix}$$

Puisque

$$S = S_0 + Y_2 \cdot S_1 + Y_3 \cdot S_2$$

Alors

$$M(x) = M_0(x) + 1804M_1(x) + 4833M_2(x)$$

Et puisque

$$V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$$

La réponse est finalement :

$0 < x < 2$	$M(x) = -137x$ $V(x) = 137$
$2 < x < 4$	$M(x) = -1000x^2 + 5667x - 7608$ $V(x) = 2000x - 5667$
$4 < x < 6$	$M(x) = -1000x^2 + 10500x - 26940$ $V(x) = 2000x - 10500$

4.13.3 Solution 10

Calcul du degré d'hyperstaticité

Nombre d'inconnues				Nombre d'équations
Nœud	Liaison	Eléments concernés	Nombre d'inconnues	Il y a 6 poutres donc : $6 \times 3 = 18 \text{ équations}$
1	Rotule	Extérieur Poutre 1-2	2	
2	encastrement	Poutre 1-2 Poutre 2-3 Poutre 2-5	$2 \times 3 = 6$	
3	encastrement	Poutre 2-3 Poutre 3-4	3	
4	encastrement	Poutre 3-4 Poutre 4-5	3	
5	encastrement	Poutre 2-5 Poutre 4-5 Poutre 5-6	$2 \times 3 = 6$	
6	Appui simple	Extérieur Poutre 5-6	1	
Total			21	

Le degré d'hyperstaticité est égal à :

$$h = 21 - 18 = 3$$

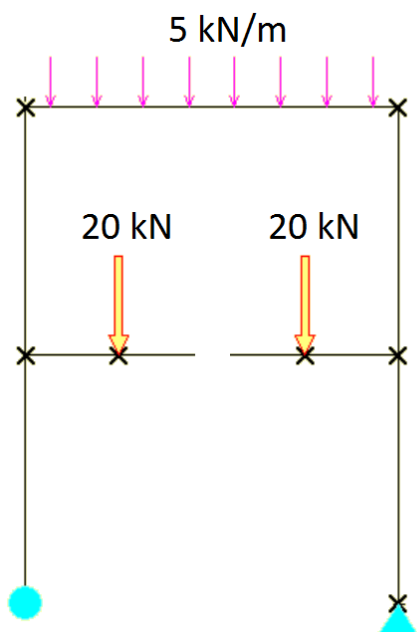
Puisqu'aucun mouvement n'est possible, la structure est hyperstatique de degré 3.

Structures isostatiques associées

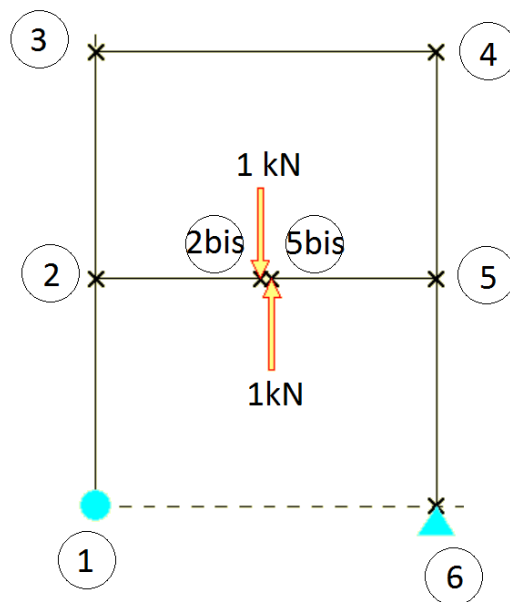
Pour libérer 3 degrés de liberté, créons une coupure entre les forces ponctuelles (structure S_0).

Puis au niveau de la coupure, il faut tenir compte de l'effort tranchant (structure S_1), du moment fléchissant (structure S_2) et de l'effort normal (structure S_3) qui existent dans la structure initiale.

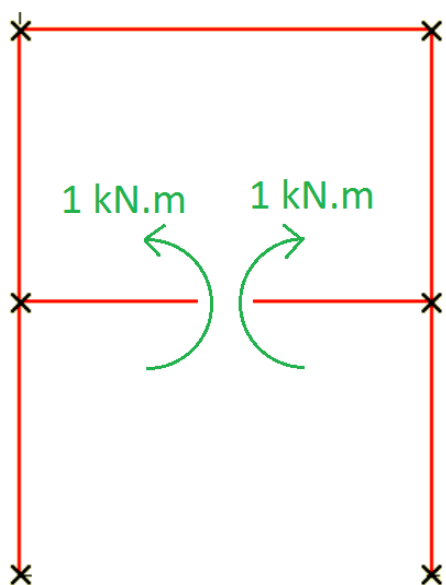
Structure S_0



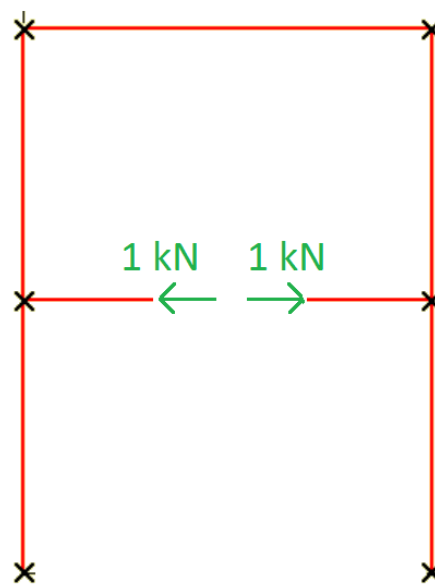
Structure S_1



Structure S_2

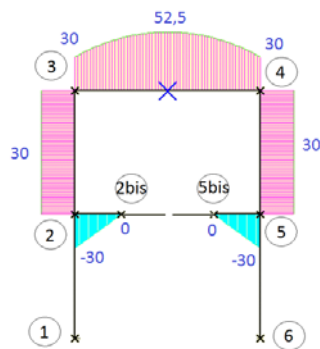


Structure S_3



Moment fléchissant

Structure S_0



Poutre 1-2 et 5-6 : $M_0(x) = 0$

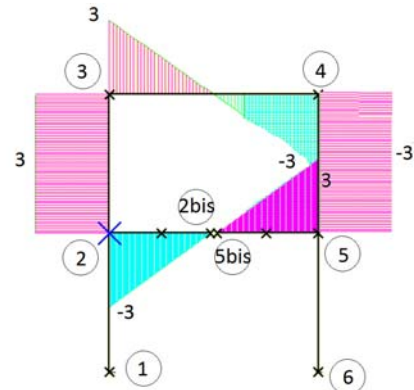
Poutre 2-3 et 4-5 : $M_0(x) = 30$

Poutre 2-2bis : $M_0(x) = \begin{cases} -30 + 20x & \text{pour } 0 < x < 1,5 \\ 0 & \text{pour } 1,5 < x < 3 \end{cases}$

Poutre 5bis-5 : $M_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 < x < 1,5 \\ -20x + 30 & \text{pour } 1,5 < x < 3 \end{cases}$

Poutre 3-4 : $M_0(x) = -2,5x^2 + 15x + 30$

Structure S_1



Poutre 1-2 et 5-6 : $M_1(x) = 0$

Poutre 2-3 : $M_1(x) = 3$

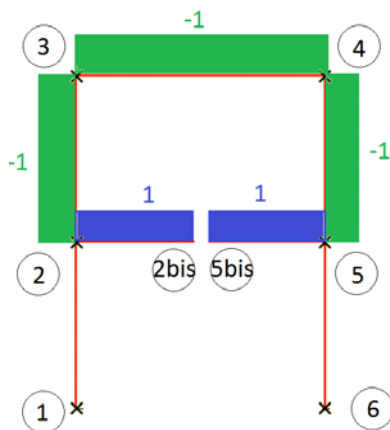
Poutre 4-5 : $M_1(x) = -3$

Poutre 2-2bis : $M_1(x) = -3 + x$

Poutre 5bis-5 : $M_1(x) = x$

Poutre 3-4 : $M_1(x) = 3 - x$

Structure S_2



Poutre 1-2 et 5-6 : $M_2(x) = 0$

Poutre 2-3 : $M_2(x) = -1$

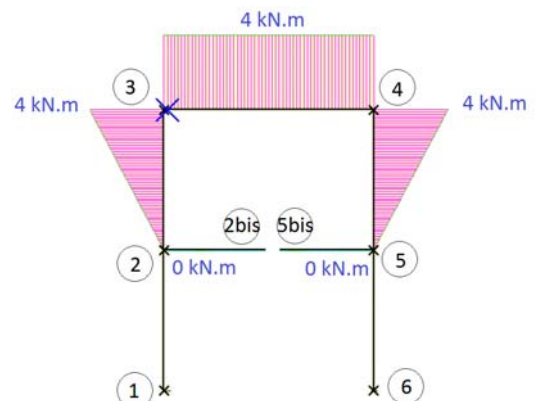
Poutre 4-5 : $M_2(x) = -1$

Poutre 2-2bis : $M_2(x) = 1$

Poutre 5bis-5 : $M_2(x) = 1$

Poutre 3-4 : $M_2(x) = -1$

Structure S_3



Poutre 1-2 et 5-6 : $M_3(x) = 0$

Poutre 2-3 : $M_3(x) = x$

Poutre 4-5 : $M_3(x) = 4 - x$

Poutre 2-2bis : $M_3(x) = 0$

Poutre 5bis-5 : $M_3(x) = 0$

Poutre 3-4 : $M_3(x) = 4$

Résultats des intégrales $\int M_i M_j$

Poutres	$EI\delta_{11}$	$EI\delta_{22}$	$EI\delta_{33}$	$EI\delta_{12}$	$EI\delta_{13}$	$EI\delta_{23}$	$EI\delta_{01}$	$EI\delta_{02}$	$EI\delta_{03}$
1-2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-3	36	4	21,33	-12	24	-8	360	-120	240
3-4	18	6	96	0	0	-24	0	-270	1080
4-5	36	4	21,33	12	-24	-8	-360	-120	240
5-6	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2-2bis	9	3	0	-4,5	0	0	56,25	-22,5	0
5-5bis	9	3	0	4,5	0	0	-56,25	-22,5	0
total	108	20	138,67	0	0	-40	0	-555	1560

En posant que :

$$S = S_0 + X_1 \cdot S_1 + X_2 \cdot S_2 + X_3 \cdot S_3$$

Il vient que :

$$EI \begin{pmatrix} 108 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -40 \\ 0 & -40 & 138,67 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -555 \\ 1560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & -40 \\ 0 & -40 & 138,67 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 555 \\ -1560 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12,41 \\ -7,67 \end{pmatrix}$$

Au final, au niveau de la poutre 3-4, le moment est égal à :

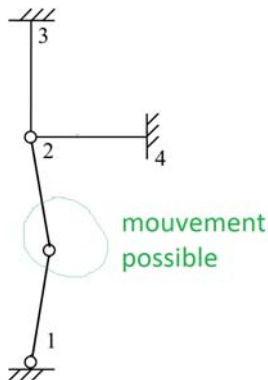
$$\begin{aligned} M(x) &= M_0(x) + 12,41 \cdot M_2(x) - 7,67 M_3(x) \\ &= -2,5x^2 + 15x + 30 + 12,41 \times (-1) - 7,67 \times 4 \\ &= -2,5x^2 + 15x - 13,09 \end{aligned}$$

Le moment maximal est au niveau du centre de la poutre, donc :

$$M(x = 3m) = -2,5 \times 3^2 + 15 \times 3 - 13,09 = \boxed{9,41 \text{ kN.m}}$$

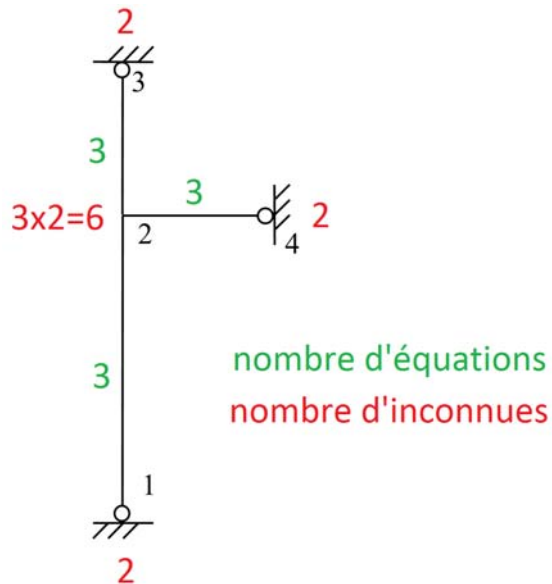
4.13.4 Solution 11

Structure S₁



Il existe une possibilité de mouvement à cause des rotules, donc **la structure est hypostatique**. La méthode des forces ne s'applique donc pas.

Structure S₂

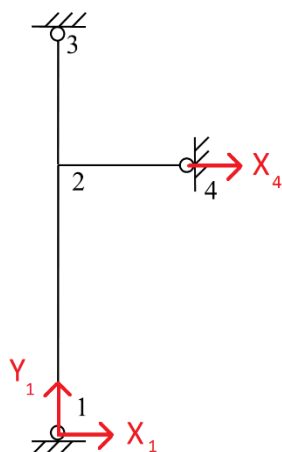


12 inconnues

9 équations

$H=3$

Puisqu'aucun mouvement n'est possible, la structure est hyperstatique de degré 3.



On peut par exemple libérer

- la rotule en 1 (le nœud 1 devient une extrémité libre)
- le déplacement horizontal en 4 (le nœud 4 devient alors un appui simple).

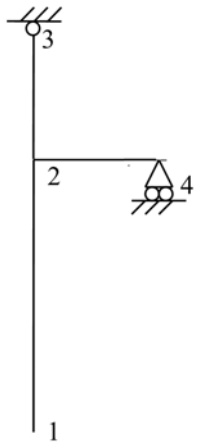
Les inconnues hyperstatiques sont donc :

Y_1 , X_1 et X_4 .

Les équations sont de type **cinématique** puisque :

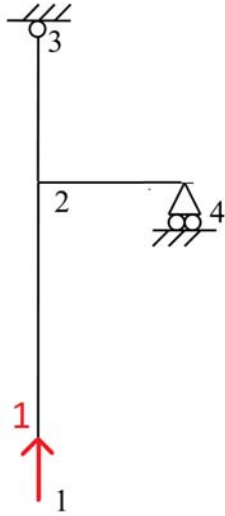
$$U_1 = V_1 = X_4 = 0$$

La structure isostatique associée est $S_{0,2}$

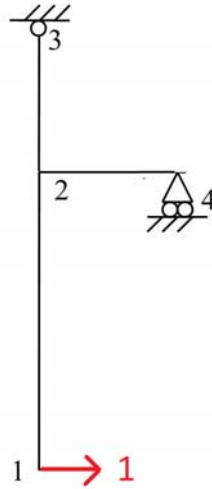


Le chargement initial est conservé.

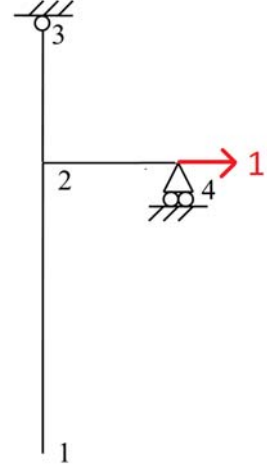
$S_{1,2}$



$S_{2,2}$



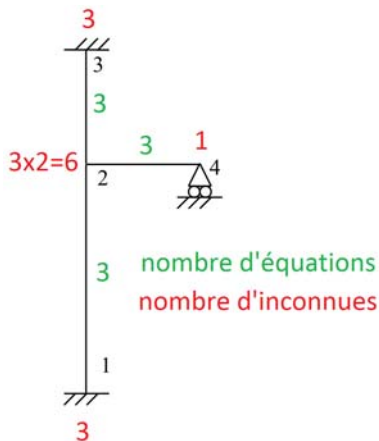
$S_{3,2}$



Avec :

$$S_2 = S_{0,2} + Y_1 S_{1,2} + X_1 S_{2,2} + X_4 S_{3,2}$$

Structure S_3

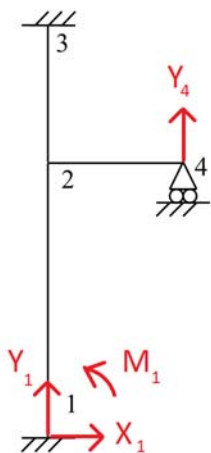


13 inconnues

9 équations

$H=4$

Puisqu'aucun mouvement n'est possible, la structure est hyperstatique de degré 4.



On peut par exemple libérer

- l'encastrement en 1 (le nœud 1 devient une extrémité libre)
- l'appui simple en 4 (le nœud 4 devient une extrémité libre).

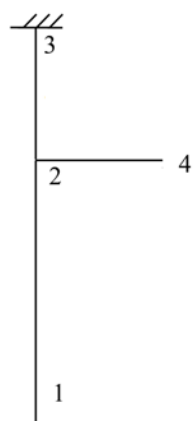
Les inconnues hyperstatiques sont donc :

Y_1, X_1, M_1 et Y_4 .

Les équations sont de type **cinématique** puisque :

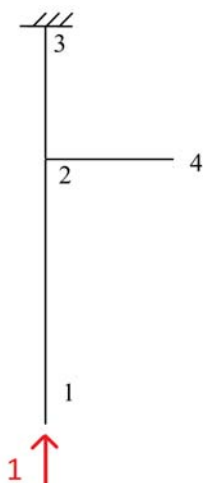
$$\begin{cases} U_1 = V_1 = V_4 = 0 \\ \Omega_1 = 0 \end{cases}$$

La structure isostatique $S_{0,3}$ associée est

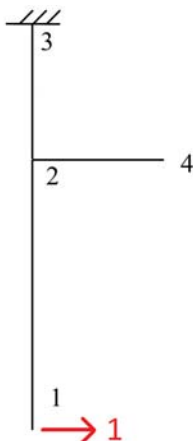


Le chargement initial est conservé.

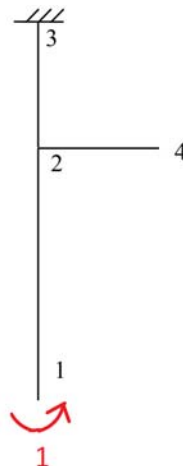
$S_{1,3}$



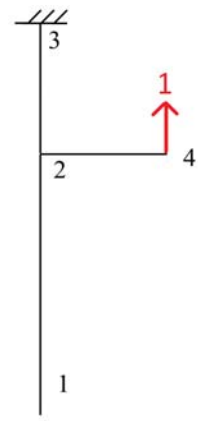
$S_{2,3}$



$S_{3,3}$



$S_{4,3}$

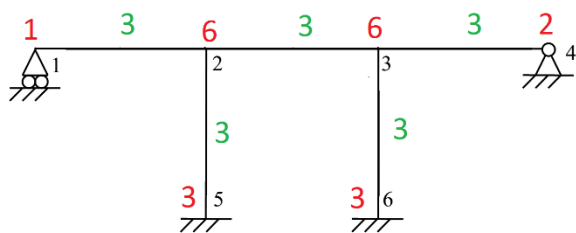


Avec :

$$S_3 = S_{0,3} + Y_1 S_{1,3} + X_1 S_{2,3} + M_1 S_{3,3} + Y_4 S_{4,3}$$

4.13.5 Solution 12

Structure S_1



21 inconnues

15 équations

$H=6$

Puisqu'aucun mouvement n'est possible, la structure est hyperstatique de degré 6.

nombre d'équations

nombre d'inconnues

On peut par exemple libérer

- L'encastrement en 5 (le nœud 5 devient une extrémité libre)
- L'encastrement en 6 (le nœud 6 devient alors une extrémité libre).

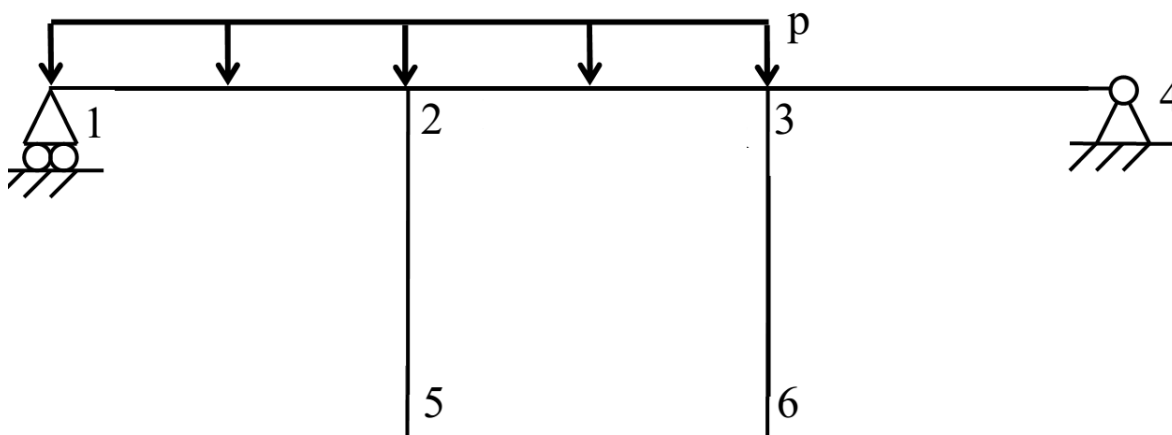
Les inconnues hyperstatiques sont donc :

X_5 , Y_5 , M_5 , X_6 , Y_6 et M_6 .

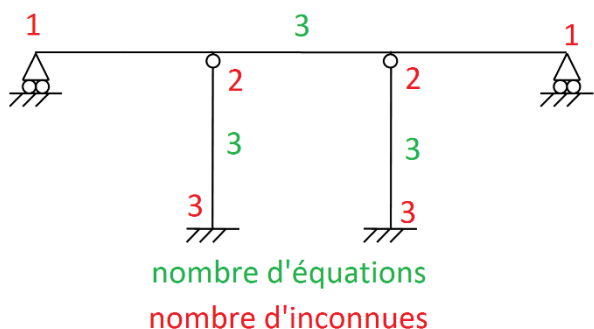
Les équations sont de type **cinématique** puisque :

$$\begin{cases} U_5 = V_5 = U_6 = V_6 = 0 \\ \Omega_5 = \Omega_6 = 0 \end{cases}$$

La structure isostatique $S_{0,1}$ associée est



Structure S_2



12 inconnues

9 équations

$H=3$

Puisqu'aucun mouvement n'est possible, la structure est hyperstatique de degré 3.

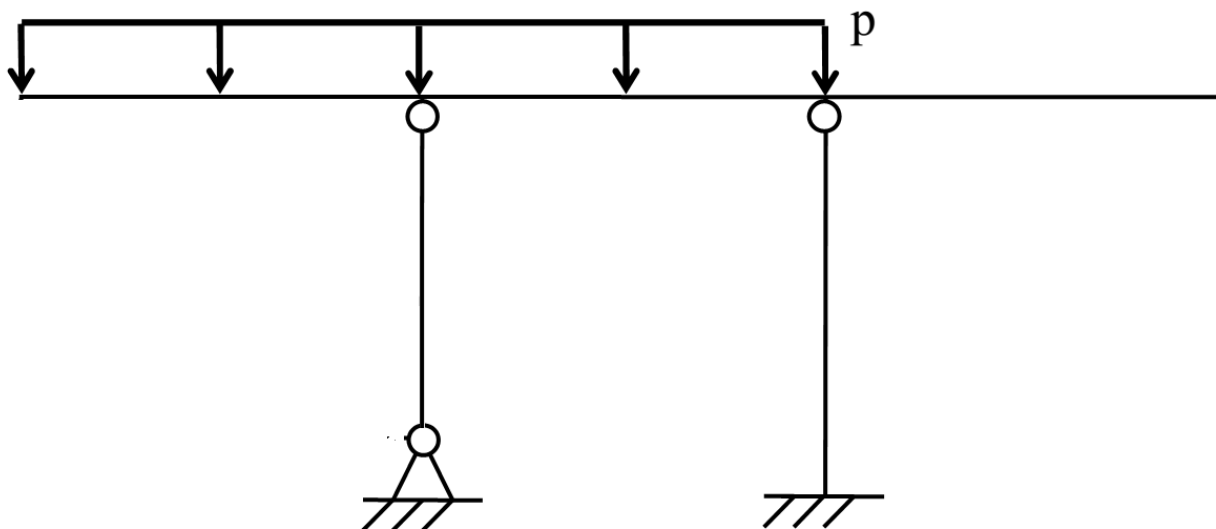
On peut par exemple libérer

- La rotation en 5 (le nœud 5 devient une rotule)
- Le déplacement vertical en 1 (le nœud 1 devient alors une extrémité libre)
- Le déplacement vertical en 4 (le nœud 4 devient alors une extrémité libre)

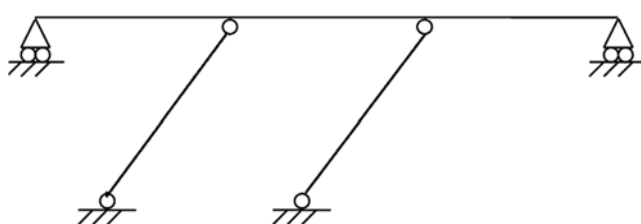
Les inconnues hyperstatiques sont donc : M_5 , Y_1 et Y_4

Les équations sont de type **cinématique** puisque : $\begin{cases} V_1 = V_4 = 0 \\ \Omega_5 = 0 \end{cases}$

La structure isostatique $S_{0,2}$ associée est



Structure S_3



Il existe une possibilité de mouvement à cause des rotules, donc la structure est hypostatique. La méthode des forces ne s'applique donc pas.

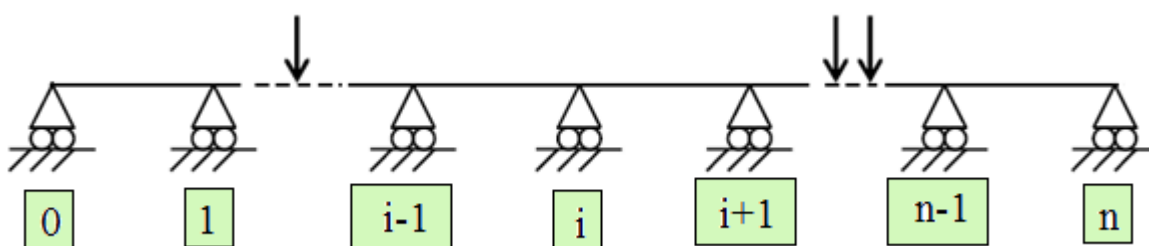
5. Méthode des trois moments

5.1 Domaine d'application

- Poutre droite continue
- Appuis simples (trois ou plus) fixes horizontalement (les déplacements verticaux différentiels sont autorisés)
- Inertie constante pour chaque travée
- Module de Young constant pour chaque travée
- Déformations d'effort tranchant négligées
- Pas d'effort normal

5.2 Résultats de la méthode

La poutre est composée de $(n+1)$ sommets,



La méthode des trois moments permet d'obtenir les moments fléchissants au niveau des appuis.

A l'appui i , le moment est noté par la suite : M_i .

Les réactions d'appuis sont calculées à partir de la différence d'effort tranchant de part et d'autre des appuis.

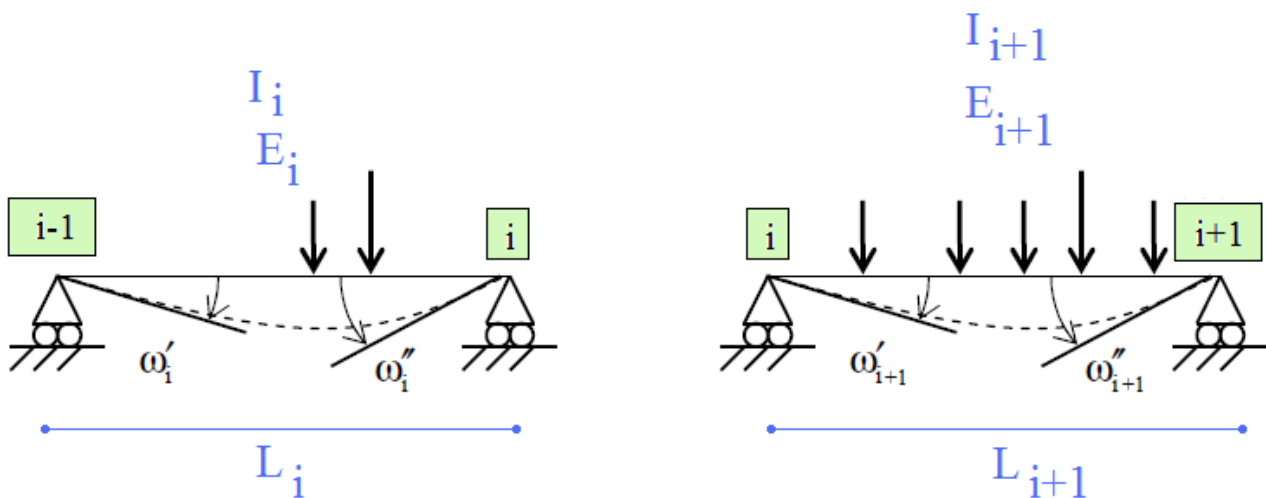
5.3 Méthode

- a) Nommer les appuis $[0]$, $[1]$, ..., $[n]$.

Les étapes b, c et d doivent être répétées pour les appuis $[1]$ à $[n-1]$.

- b) Pour l'appui $[i]$ tel que $i \in \llbracket 1 ; n-1 \rrbracket$

La travée comprise entre les appuis $[i-1]$ à $[i]$ et la travée comprise entre les appuis $[i]$ à $[i+1]$ sont isolées et sont prises chacune comme étant une poutre isostatique bi-appuyée. Le chargement est conservé.



- c) Détermination des rotations à l'aide du formulaire des poutres bi-appuyées.
Nota : en cas de chargement plus complexe, il est possible d'utiliser le principe de superposition.
- d) Utilisation de la relation de la méthode des trois moments :

Cas général : les nœuds ont des déplacements verticaux différentiels et EI varie d'une travée à une autre.

$$\frac{L_i}{6E_i I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{L_i}{6E_i I_i} + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} \right) M_i + \frac{L_{i+1}}{6E_{i+1} I_{i+1}} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \frac{v_{i-1} - v_i}{L_i} + \frac{v_{i+1} - v_i}{L_{i+1}}$$

Simplification 1 : les nœuds ont des déplacements verticaux différentiels et EI est constant le long de la poutre.

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI \left[\omega'_{i+1} - \omega''_i + \frac{v_i - v_{i-1}}{L_i} + \frac{v_i - v_{i+1}}{L_{i+1}} \right]$$

Simplification 2 : les nœuds sont fixes et EI est constant le long de la poutre.

$$L_i M_{i-1} + 2(L_i + L_{i+1}) M_i + L_{i+1} M_{i+1} = 6EI [\omega'_{i+1} - \omega''_i]$$

On obtient l'équation $[i]$.

e) Puisque les appuis $[0]$ à $[n]$ sont des extrémités non encastrées, il vient que :

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ M_n = 0 \end{cases}$$

f) Ainsi, un système de $(n-1)$ équations et $(n-1)$ inconnues est obtenu. Sa résolution permet d'obtenir les moments au niveau de chaque appui.

5.4 Cas particulier d'un (ou deux) encastrement(s) à une (aux) extrémité(s)

Illustration

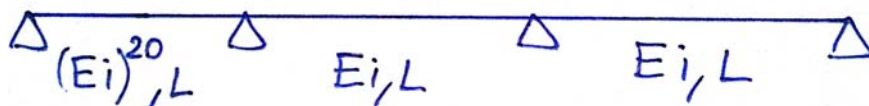
Soit la poutre à deux travées (le chargement n'est pas représenté):

- encastrée à gauche
- de longueurs L et de caractéristique EI

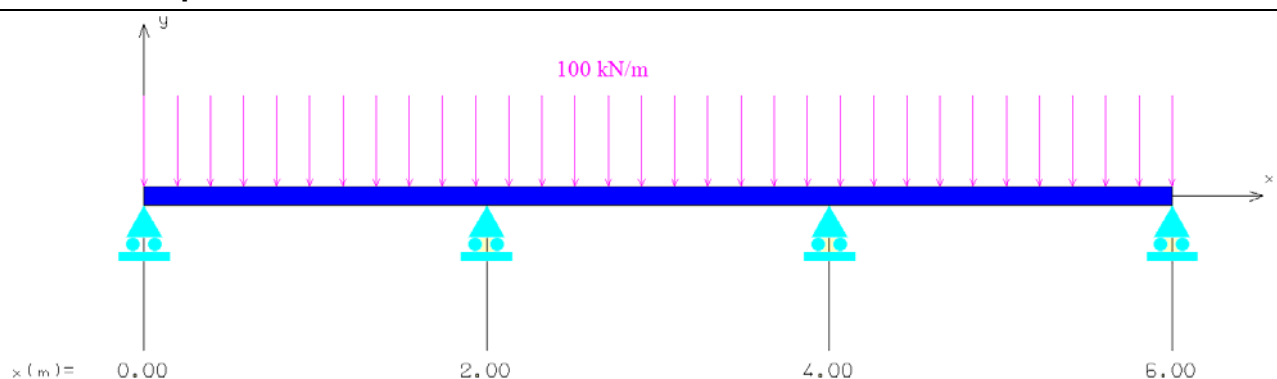


Pour s'approcher du comportement de l'encastrement, il suffit d'utiliser la même méthode après avoir ajouté une travée à gauche ayant pour caractéristiques :

- une longueur L
- Le produit entre le moment d'inertie et le module de Young tendant vers l'infini (par exemple $(EI)^{20}$)
- Aucun chargement



5.5 Exemple



Données :

Inertie : 1440 mm^4

Module de Young : $10\,000 \text{ MPa}$

Déterminer les moments au niveau de chaque appui.

Solution

Numérotation des appuis



Au niveau de l'appui 1, la travée de droite et la travée de gauche sont prises isostatiques.
Les rotations ω''_1 et ω'_2 sont calculées à partir du formulaire des poutres « bi-appuyées ».

Travée de gauche isostatique	Travée de droite isostatique
$\omega''_1 = \frac{pl^3}{24EI}$ $= \frac{100 \cdot 10^3 \times 2^3}{24 \times 10000 \cdot 10^6 \times 1440 \cdot 10^{-12}} \approx 2314$	$\omega'_2 = -\frac{pl^3}{24EI}$ $= -\frac{100 \cdot 10^3 \times 2^3}{24 \times 10000 \cdot 10^6 \times 1440 \cdot 10^{-12}} \approx -2314$

Donc il vient que :

$$2 \times M_0 + 2 \times (2 + 2) \times M_1 + 2 \times M_2 = 6 \times 10000 \cdot 10^6 \times 1440 \cdot 10^{-12} \times (-2314 - 2314)$$

Avec $M_0 = 0$ N.m (extrémité non encastree), l'équation devient :

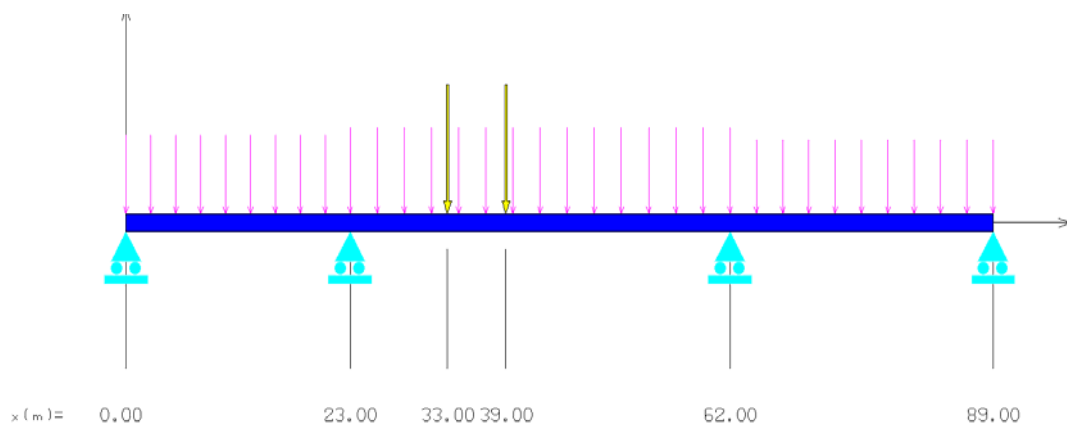
$$8 \cdot M_1 + 2 \cdot M_2 \approx -400000$$

En remarquant la symétrie du problème, il n'est pas nécessaire de faire l'équation de l'appui 2 puisqu'il vient de suite que : $M_2 = M_1$ et donc :

$$M_2 = M_1 \approx -40000 \text{ N.m} \leftrightarrow \boxed{-40 \text{ kN.m}}$$

5.6 Exercices

Exercice 13



El est constant le long de la poutre

Chargement réparti :

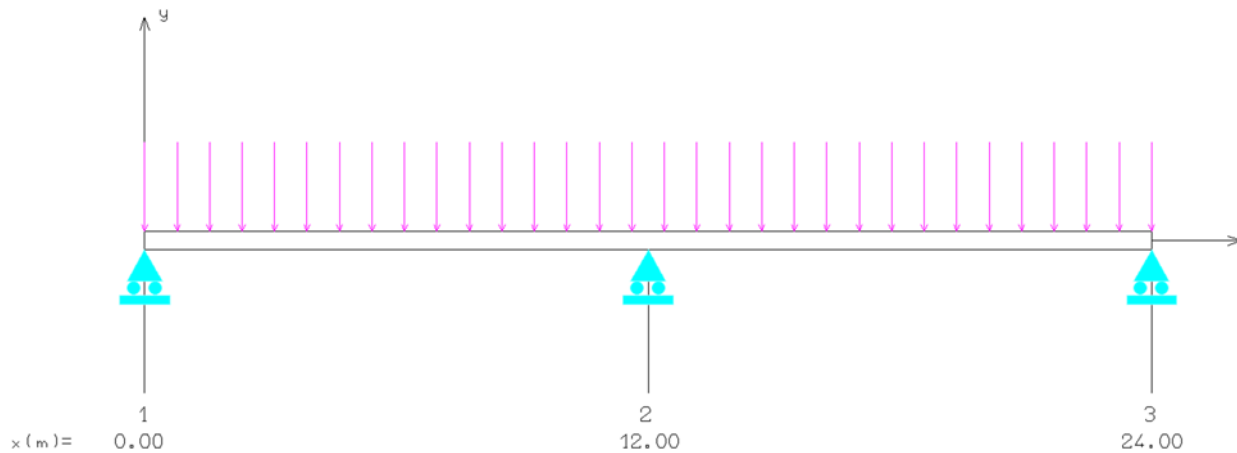
- De 0 à 23 m : 33 kN/m
- De 23 à 62 m : 36 kN/m
- De 62 à 89 m : 31 kN/m

Chargement ponctuel à 33 m et 39 m : 200 kN

Déterminer

- les moments aux points d'abscisse 23m et 63 m
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 14



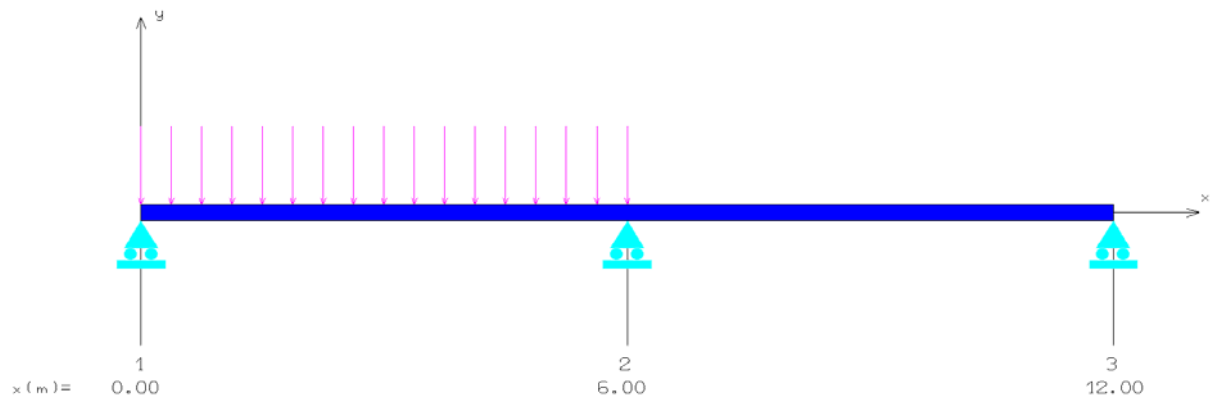
El est constant le long de la poutre

Chargement réparti : 20 kN/m

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 15



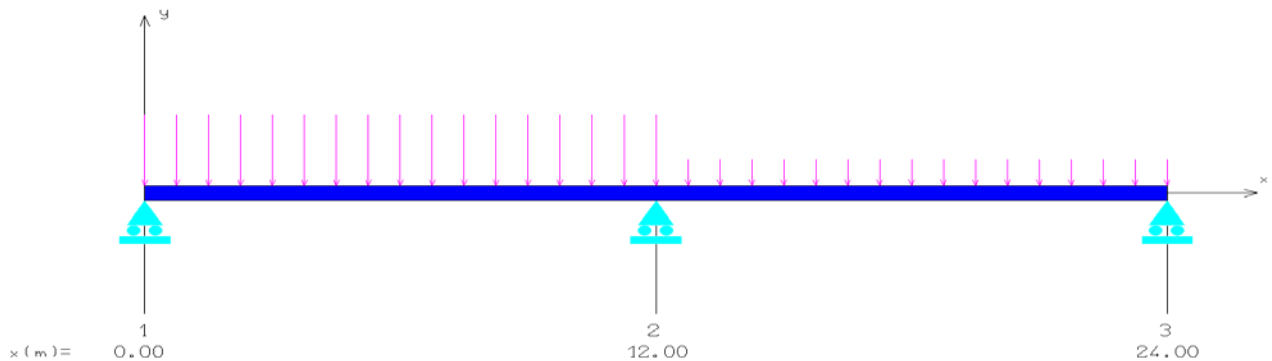
EI est constant le long de la poutre

Chargement réparti : 10 kN/m de 0 à 6 m

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 16



EI est constant le long de la poutre

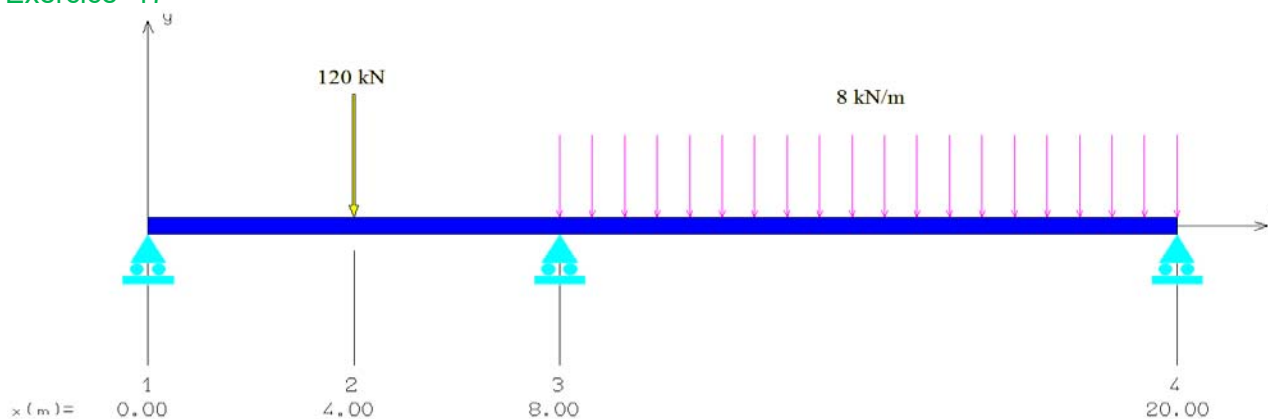
Chargement réparti :

- De 0 à 12 m : 80 kN/m
- De 12 à 24 m : 30 kN/m

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 17

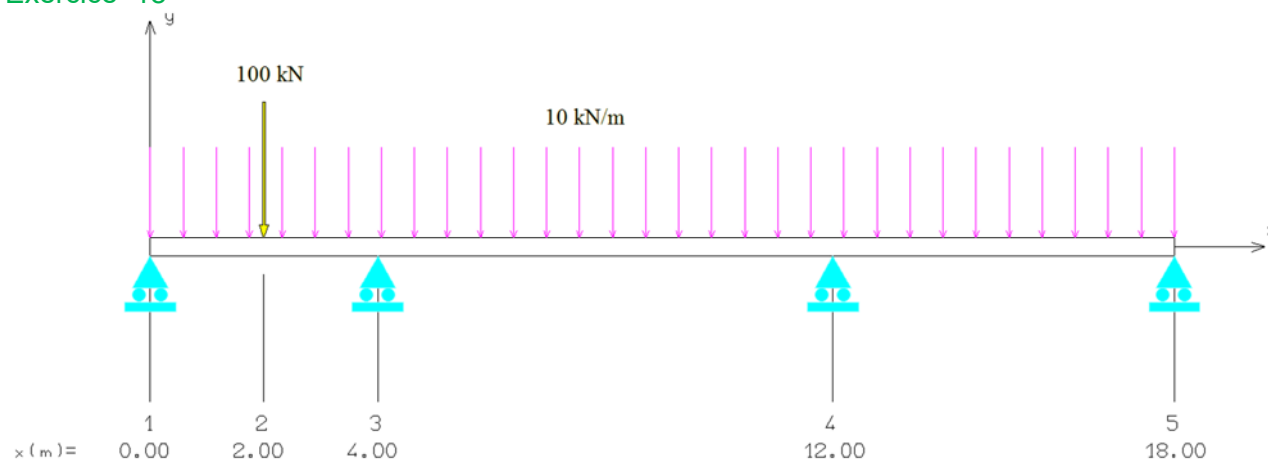


EI est constant le long de la poutre

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 18

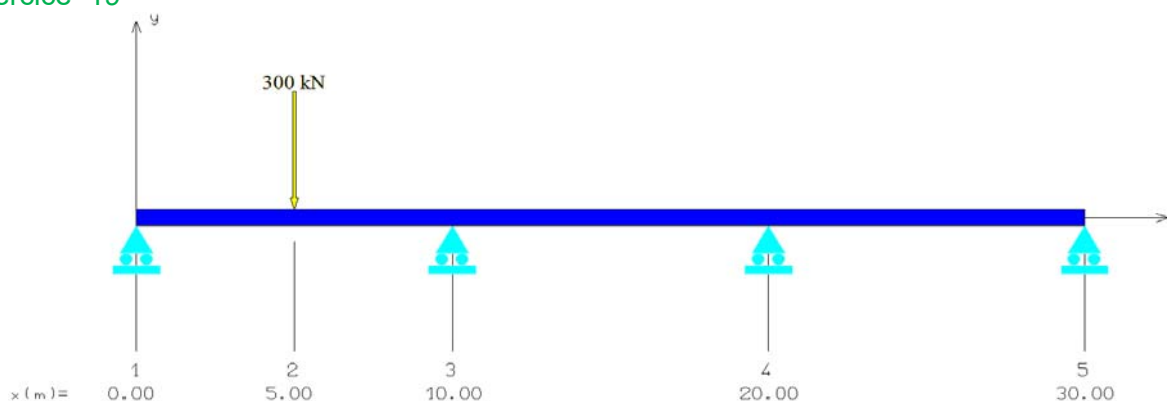


EI est constant le long de la poutre

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 19

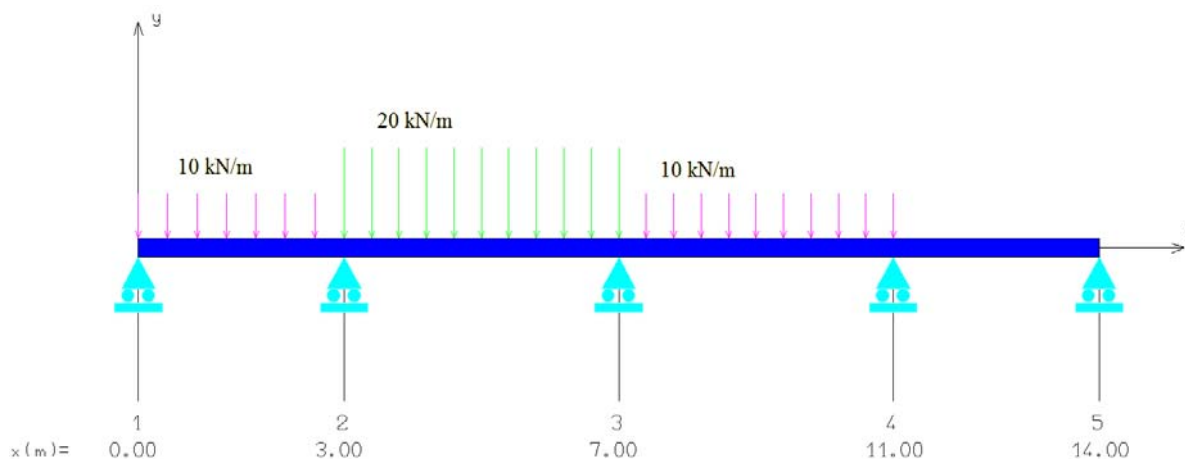


EI est constant le long de la poutre

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 20



E est constant le long de la poutre

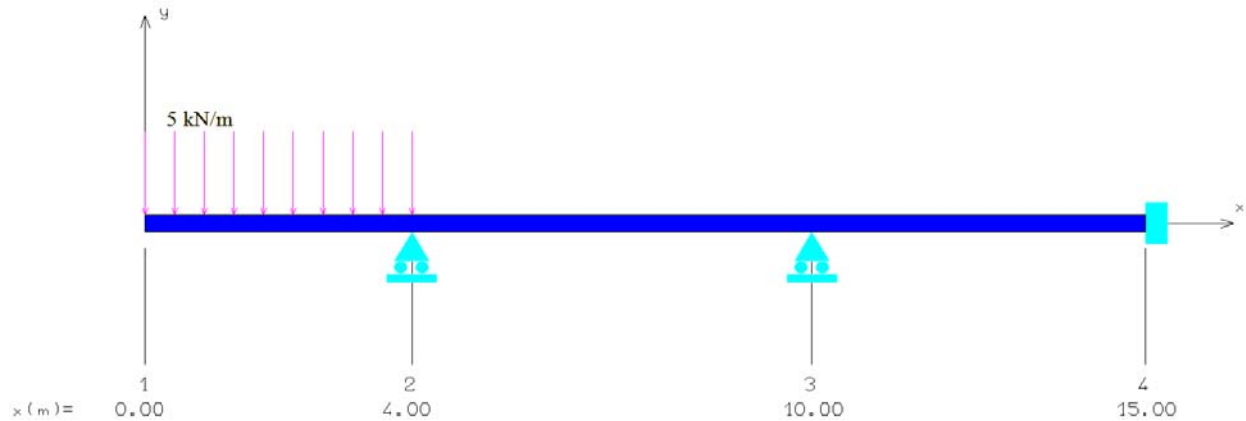
I varie en fonction de x :

- De 0 à 3 m : I_0
- De 3 à 7 m : $2I_0$
- De 7 à 11 m : $2I_0$
- De 11 à 14 m : $1,5I_0$

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer $V(x)$ et $M(x)$
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 21

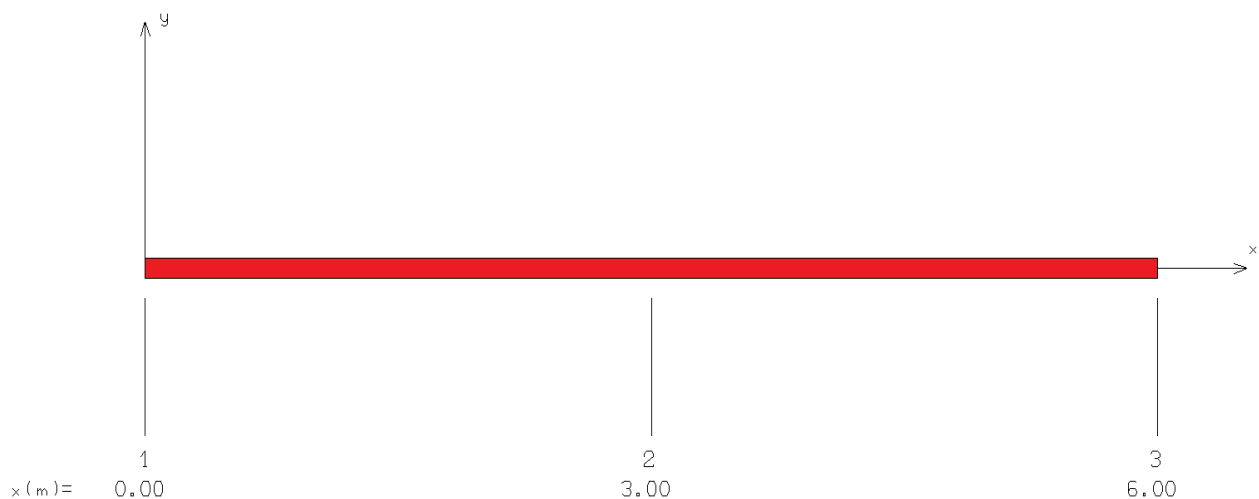


EI est constant le long de la poutre

Déterminer

- les moments sur appuis
- Déterminer puis tracer les diagrammes de sollicitations
- Calculer les réactions d'appuis

Exercice 22



$E = 200\,000\text{ MPa}$

$I = 78\text{ cm}^2$

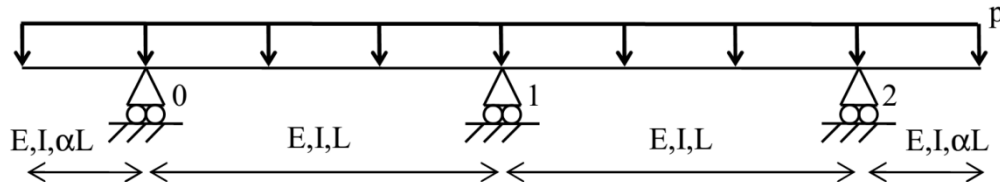
Les deux appuis 1 et 3 restent fixes et l'appui 2 s'affaisse de 10 cm, déterminer :

- les moments sur appuis
- Déterminer $M(x)$ et $V(x)$
- Calculer les réactions d'appuis

5.7 Extraits d'annales

Exercice 23 : extrait des annales de novembre 2013

Partie II : Méthode des forces (7 pts)



Déterminer α pour avoir $M_0 = M_1$

Pour $\alpha = 1/\sqrt{6}$:

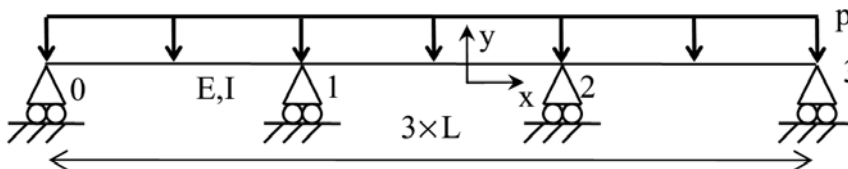
- Tracer $V(x)$ et $M(x)$
- Est-ce la valeur de α pour avoir un moment fléchissant minimum en valeur absolue dans la structure ?
- Déterminer la flèche maximum (on pourra admettre que les flèches et rotations sont toutes nulles au niveau de tous les appuis, on étudiera la console et la travée 1)

Déterminer α maximum pour ne pas avoir de risque de soulèvement à l'appui 1

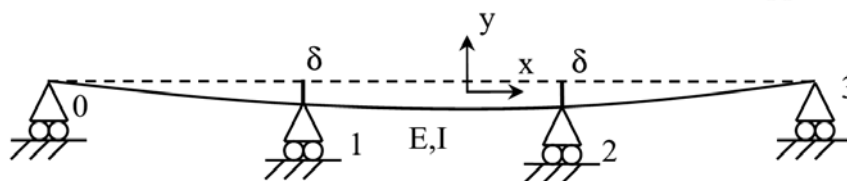
Exercice 24 : extrait des annales de décembre 2014

Partie II : Méthode des forces (formule des 3 moments) (7 pts)

Déterminer les sollicitations du problème suivant : (cas p) **Doc. Réponse**



Déterminer les sollicitations dues à une dénivellation des appuis 1 et 2 : (cas δ) **Doc. Réponse**



En déduire les réactions d'appui sous la combinaison (cas p) + (cas δ)

Déterminer la valeur minimum $\delta_{\min}$ pour laquelle les moments fléchissants sont toujours positifs sous la combinaison (cas p) + (cas δ)

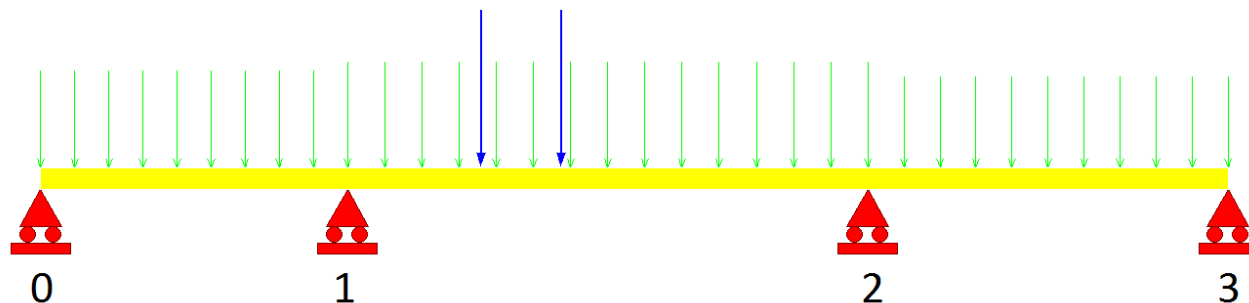
Tracer les sollicitations correspondantes : (cas p) + (cas $\delta_{\min}$) **Doc. Réponse**

Les réactions d'appuis sont-elles toujours vers le haut ?

5.8 Solutions

5.8.1 Solution 13

Numérotation des nœuds



Travée 0-1

$$\begin{cases} L = 23 \text{ m} \\ p = 33000 \text{ N/m} \end{cases} \Rightarrow EI\omega''_1 = \frac{pL^3}{24} = 16729625$$

Travée 1-2

Force ponctuelle 1	Force ponctuelle 2	Force répartie
$\begin{cases} L = 23 \text{ m} \\ F = 200\,000 \text{ N} \\ a = 10 \text{ m} \end{cases}$ $EI\omega'_2 = -\frac{Fa}{6L}(L-a)(2L-a)$ $= -16854700$ $EI\omega''_2 = \frac{Fa}{6L}(L^2 - a^2)$ $= 12145299$	$\begin{cases} L = 23 \text{ m} \\ F = 200\,000 \text{ N} \\ a = 16 \text{ m} \end{cases}$ $EI\omega'_2 = -\frac{Fa}{6L}(L-a)(2L-a)$ $= -19500855$ $EI\omega''_2 = \frac{Fa}{6L}(L^2 - a^2)$ $= 17299145$	$\begin{cases} L = 23 \text{ m} \\ p = 33000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{cases}$ $EI\omega'_2 = \frac{-pL^3}{24} = -88978500$ $EI\omega''_2 = 88978500$

Donc

$$EI\omega'_2 = -125334055$$

$$EI\omega''_2 = 118422944$$

Travée 2-3

$$\begin{cases} L = 27 \text{ m} \\ p = 31000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \end{cases} \Rightarrow EI\omega'_3 = \frac{-pL^3}{24} = -25423875$$

Formule des 3 moments $\begin{cases} L_1 = 23 \text{ m} \\ L_2 = 39 \text{ m} \\ L_3 = 27 \text{ m} \end{cases}$

Appui 1 :

$$2(23 + 39)M_1 + 39M_2 = 6EI \left(-\frac{125334055}{EI} - \frac{16729625}{EI} \right)$$

$$\Rightarrow 124M_1 + 39M_2 = -852382080$$

Appui 2 :

$$39M_1 + 2(39 + 27)M_2 = 6EI \left(-\frac{25423875}{EI} - \frac{118422944}{EI} \right)$$

$$\Rightarrow 39M_1 + 132M_2 = -863080914$$

Résolution de l'équation

$$\begin{pmatrix} 124 & 39 \\ 39 & 132 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -852382080 \\ -863080914 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 = -5311125 \text{ N.m} \leftrightarrow -5311 \text{ kN.m} \\ M_2 = -4969296 \text{ N.m} \leftrightarrow -4969 \text{ kN.m} \end{cases}$$

Travée 0-1 : $0 < x < 23 \text{ m}$

$$\begin{cases} M_0 = 0 \text{ kN.m} \\ M_1 = -5311 \text{ kN.m} \\ M_{iso}(x) = \frac{33x}{2}(23 - x) = 379,5x - 16,5x^2 \end{cases} \Rightarrow M(x) = -16,5x^2 + 148,59x$$

Travée 1-2 : $23 < x < 62 \text{ m}$

$$\begin{cases} M_1 = -5311 \text{ kN.m} \\ M_2 = -4969 \text{ kN.m} \\ L = 39 \text{ m} \end{cases}$$

En posant $X = x - 23$

$M_{iso}(X)$ est égal à la somme des 3 chargements élémentaires :

	Force ponctuelle 1 (X=10m)	Force ponctuelle 2 (X=16m)	Force répartie
$0 < X < 10 \text{ m}$	$148,7X$	$117,9X$	$702X - 18X^2$
$10 < X < 16 \text{ m}$	$-51,3X + 2000$	$117,9X$	$702X - 18X^2$
$16 < X < 39 \text{ m}$	$-51,3X + 2000$	$-82,1X + 3200$	$702X - 18X^2$

En sommant les 3 chargements et en remplaçant X par $x - 23$:

$23 < x < 33 \text{ m}$	$M_{iso}(x) = -18x^2 + 1796,6x - 31800$
$33 < x < 39 \text{ m}$	$M_{iso}(x) = -18x^2 + 1596,6x - 25200$
$39 < x < 62 \text{ m}$	$M_{iso}(x) = -18x^2 + 1396,6x - 17400$

De plus,

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{39 - X}{39} \right) + M_2 \frac{X}{39}$$

$$\Rightarrow M(x) = M_{iso}(x) - 5311 \left(\frac{39 - x + 23}{39} \right) - 4969 \left(\frac{x - 23}{39} \right)$$

$$= M_{iso}(x) + 8,8x - 5513$$

Au final, sur la travée 1-2 :

$23 < x < 33 \text{ m}$	$M(x) = -18x^2 + 1805,4x - 37313$
$33 < x < 39 \text{ m}$	$M(x) = -18x^2 + 1605,4x - 30713$
$39 < x < 62 \text{ m}$	$M(x) = -18x^2 + 1405,4x - 22913$

Travée 2-3 : $62 < x < 89 \text{ m}$

$$\begin{cases} M_2 = -4969 \text{ kN.m} \\ M_3 = 0 \text{ kN.m} \\ L = 27 \text{ m} \end{cases}$$

En posant $X' = x - 62$

$$M_{iso}(X') = 418,5X' - 15,5X'^2$$

$$\text{Donc } M_{iso}(x) = -15,5x^2 + 2340,5x - 85529$$

Ensuite,

$$M(X') = M_{iso}(X') + M_2 \left(\frac{27 - X'}{27} \right)$$

$$\Rightarrow M(x) = M_{iso}(x) - 4969 \left(\frac{27 - x + 62}{27} \right) = -15,5x^2 + 2524,5x - 101908$$

Au final :

$$\begin{cases} 0 < x < 23 \text{ m} \Rightarrow M(x) = -16,5x^2 + 148,59x \\ 23 < x < 33 \text{ m} \Rightarrow M(x) = -18x^2 + 1805,4x - 37313 \\ 33 < x < 39 \text{ m} \Rightarrow M(x) = -18x^2 + 1605,4x - 30713 \\ 39 < x < 62 \text{ m} \Rightarrow M(x) = -18x^2 + 1405,4x - 22913 \\ 62 < x < 89 \text{ m} \Rightarrow M(x) = -15,5x^2 + 2524,5x - 101908 \end{cases}$$

Pour le calcul de $V(x)$, on utilise $V(x) = -\frac{dM}{dx}$

$$\begin{cases} 0 < x < 23 \text{ m} \Rightarrow V(x) = 33x - 148,59 \\ 23 < x < 33 \text{ m} \Rightarrow V(x) = 36x - 1805,4 \\ 33 < x < 39 \text{ m} \Rightarrow V(x) = 36x - 1605,4 \\ 39 < x < 62 \text{ m} \Rightarrow V(x) = 36x - 1405,4 \\ 62 < x < 89 \text{ m} \Rightarrow V(x) = 31x - 2524,5 \end{cases}$$

Les réactions d'appuis correspondent au « saut » d'effort tranchant au niveau de l'appui considéré :

$$R_0 = -V(0^+) \Rightarrow R_0 = 148,6 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} V(23^-) = 33 \times 23 - 148,59 = 610,4 \text{ kN} \\ V(23^+) = 36 \times 23 - 1805,4 = -977,4 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 = V(23^-) - V(23^+) \Rightarrow R_1 = 1587,8 \text{ kN}$$

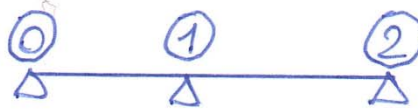
$$\begin{cases} V(62^-) = 36 \times 62 - 1405,4 = 826,6 \text{ kN} \\ V(62^+) = 31 \times 62 - 2524,5 = -602,5 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 = V(62^-) - V(62^+) \Rightarrow R_2 = 1429,1 \text{ kN}$$

$$R_3 = V(89^-) \Rightarrow R_3 = 234,5 \text{ kN}$$

5.8.2 Solution 14

- Numérotation des nœuds



- nœud ①

$$Ei w_1'' = \frac{20 \times 12^3}{24} = 1440 = -Ei w_2'$$

Avec $M_0 = M_2 = 0$, il vient que

$$2(12 + 12)M_1 = 6(-1440 - 1440)$$

$$\Rightarrow M_1 = -360 \text{ kN.m}$$

- Tronçée 0-1 $M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \frac{x}{12}$

$$\text{avec } M_{iso}(x) = \frac{20 \times 12 x}{2} - \frac{20 x^2}{2} = 120x - 10x^2$$

$$\text{d'où } M(x) = -10x^2 + 90x$$

$$\text{puisque } V(x) = -\frac{dM(x)}{dx} \Rightarrow V(x) = 20x - 90$$

- Par symétrie de M par rapport à ①, et par antisymétrie de V par rapport à ①, il est inutile de calculer pour la tronçée 1-2 pour obtenir le diagramme des sollicitations.

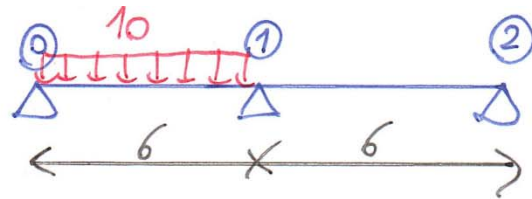
- réactions d'appui

$$R_0 = R_2 = -V(0) \Rightarrow R_0 = R_2 = 90 \text{ kN}$$

$$R_0 + R_1 + R_2 = 2Lp \Rightarrow R_1 = 300 \text{ kN}$$

5.8.3 Solution 15

• Numérotation des nœuds



• Nœud 1:

$$Ei\omega''_1 = \frac{10 \times 6^3}{24} = 90$$

$$Ei\omega'_2 = 0$$

• Avec $M_0 = M_2 = 0$

$$2(6+6)M_1 = 6[0 - 90] \Rightarrow M_1 = -22,5 \text{ kN.m}$$

• Travée 0-1: $M(x) = M_{iso}(x) + \frac{M_1 x}{6}$

avec $\begin{cases} M_{iso}(x) = \frac{10x}{2}(6-x) \\ M_1 = -22,5 \end{cases} \Rightarrow M(x) = -5x^2 + 26,25x$

• Travée 1-2 : en posant $X = x - 6$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{6-X}{6} \right)$$

Avec $\begin{cases} M_{iso}(X) = 0 \\ M_1 = -22,5 \text{ kN.m} \end{cases} \Rightarrow M(X) = 3,75X - 22,5$

$$\Rightarrow M(x) = 3,75x - 45$$

• Effort tranchant: $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Travée 0-1 : } V(x) = 10x - 26,25 \\ \text{Travée 1-2 : } V(x) = -3,75 \end{cases}$$

• Réactions d'appui

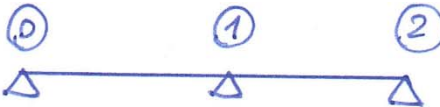
• $R_0 = -V(0) \Rightarrow R_0 = 26,25 \text{ kN}$

• $\begin{cases} V(6^-) = 10 \times 6 - 26,25 = 33,75 \\ V(6^+) = -3,75 \end{cases} \Rightarrow R_1 = 33,75 - (-3,75)$

$\Rightarrow R_1 = 37,5 \text{ kN}$

• $R_2 = V(12) \Rightarrow R_2 = -3,75 \text{ kN}$

5.8.4 Solution 16

• Numérotation des nœuds : 

• Nœud 1 : $Ei \omega''_1 = \frac{80 \times 12^3}{24} = 5760$

$$Ei \omega''_2 = -\frac{30 \times 12^3}{24} = -2160$$

Avec $M_0 = M_2 = 0$

$$\Rightarrow 2 \times (12 + 12) \times M_1 = 6 (-2160 - 5760)$$

$$\Rightarrow M_1 = -990 \text{ kN.m}$$

• Travée 0-1 : $M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \frac{x}{12}$

avec $M_{iso}(x) = \frac{80x}{2} (12-x)$

$$\Rightarrow M(x) = -40x^2 + 397,5x$$

$$\Rightarrow V(x) = -\frac{dM}{dx} \Rightarrow V(x) = 80x - 397,5$$

• Travée 1-2 : $M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{12-X}{12} \right)$

avec $\begin{cases} X = x - 6 \\ M_{iso}(X) = \frac{30X}{2} (12-X) \end{cases}$

$$\Rightarrow M(X) = -15X^2 + 262,5X - 990$$

$$\Rightarrow M(x) = -15x^2 + 442,5x - 3105$$

$$\Rightarrow V(x) = 30x - 442,5$$

• Réactions d'appui

$$R_0 = -V(0) \Rightarrow R_0 = 397,5 \text{ kN}$$

$$\begin{cases} V(12^-) = 80 \times 12 - 397,5 = 562,5 \text{ kN} \\ V(12^+) = 30 \times 12 - 442,5 = -82,5 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_1 = 562,5 - (-82,5)$$

$$\Rightarrow R_1 = 645 \text{ kN}$$

$$R_2 = V(24) = 30 \times 24 - 442,5$$

$$\Rightarrow R_2 = 277,5 \text{ kN}$$

5.8.5 Solution 17

• Numérotation des nœuds : 

• nœud 1 :

$$Ei\omega''_1 = \frac{120 \times 4}{6 \times 8} (8^2 - 4^2) = 480$$

$$Ei\omega'_2 = -\frac{8 \times 12^3}{24} = -576$$

Avec $M_0 = M_2 = 0$

$$2(8+12)M_1 = 6(-576-480)$$

$$\Rightarrow M_1 = -158,4 \text{ kN.m}$$

• Tronçée 0-1 : $M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \times \frac{x}{8}$

$$0 < x < 4 \text{ m} : M_{iso}(x) = \frac{120 \times 4 \times x}{8}$$

$$\Rightarrow M(x) = 40,2x$$

$$4 < x < 8 \text{ m} : M_{iso}(x) = 120 \times 4 \left(1 - \frac{x}{8}\right)$$

$$\Rightarrow M(x) = 480 - 79,2x$$

Puisque $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$:

$$\begin{cases} 0 < x < 4 \text{ m} : V(x) = -40,2 \\ 4 < x < 8 \text{ m} : V(x) = 79,2 \end{cases}$$

• Travée 1-2

Pons $X = a - 8$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{12-X}{12} \right)$$

$$\text{Avec } M_{iso}(X) = \frac{8X}{2}(12-X)$$

$$\Rightarrow M(X) = -4X^2 + 61,2X - 158,4$$

$$\Rightarrow M(a) = -4a^2 + 125,2a - 904$$

$$\Rightarrow V(a) = 8a - 125,2$$

• Réactions d'appui

$$R_0 = -V(0) \Rightarrow R_0 = 40,2 \text{ kN}$$

$$V(8^-) = 79,2$$

$$V(8^+) = 8 \times 8 - 125,2 = -61,2$$

$$\Rightarrow R_1 = 79,2 - (-61,2) \Rightarrow R_1 = 140,4 \text{ kN}$$

$$R_2 = V(20) = 8 \times 20 - 125,2 \Rightarrow R_2 = 34,8 \text{ kN}$$

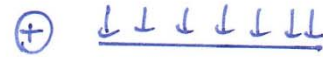
5.8.6 Solution 18

• Numérotation des nœuds



• Extrémité non encastrée $\Rightarrow M_0 = M_3 = 0$

• Nœud 1



$$Ei \omega''_1 = \frac{100 \times 2(4^2 \cdot 2^2)}{6 \times 4}$$

$$= 100$$

$$Ei \omega''_1 = \frac{10 \times 4^3}{24}$$

$$= 26,67$$

$$\Rightarrow Ei \omega''_1 = 126,67$$

$$Ei \omega'_2 = -\frac{10 \times 8^3}{24} = -213,33$$

$$\Rightarrow 2(4+8)M_1 + 8M_2 = 6 \times (-213,33 - 126,67)$$

$$\Rightarrow 24M_1 + 8M_2 = -2040$$

• Nœud 2

$$Ei \omega''_2 = -Ei \omega'_2 = 213,33$$

$$Ei \omega'_3 = -\frac{10 \times 6^3}{24} = -90$$

$$\Rightarrow 8M_1 + 2(8+6)M_2 = 6(-90 - 213,33)$$

$$\Rightarrow 8M_1 + 28M_2 = -1820$$

D'où

$$\begin{pmatrix} 24 & 8 \\ 8 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2040 \\ -1820 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 = -70 \text{ kN.m} \\ M_2 = -45 \text{ kN.m} \end{cases}$$

• Travée 0-1

$$M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \frac{x}{4}$$

$M_{iso}(x)$		
$0 < x < 2$	$\frac{10 \times 2x}{4}$	$\frac{10x}{2}(4-x)$
$2 < x < 4$	$10 \times 2 \left(1 - \frac{x}{4}\right)$	$\frac{10x}{2}(4-x)$

Donc

$$\begin{cases} 0 < x < 2 : & M(x) = 52,5x - 5x^2 \\ 2 < x < 4 : & M(x) = -5x^2 - 47,5x + 200 \end{cases}$$

Puisque $V(x) = -\frac{dM(x)}{dx}$, il vient que :

$$\begin{cases} 0 < x < 2 : & V(x) = 10x - 52,5 \\ 2 < x < 4 : & V(x) = 10x + 47,5 \end{cases}$$

• Travée 1-2 : Posons $X = x - 4$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{8-X}{8} \right) + M_2 \times \frac{X}{8}$$

$$M_{iso}(X) = \frac{10X}{2} (8-X)$$

$$\Rightarrow M(X) = -5X^2 + 83,125X - 70$$

$$\Rightarrow M(x) = -5x^2 + 83,125x - 322,5$$

$$\Rightarrow V(x) = 10x - 83,125$$

• Travée 2-3 Posons $X' = x - 12$

$$M(X') = M_{iso}(X') + M_2 \left(\frac{6-X'}{6} \right)$$

$$M_{iso}(X') = \frac{10X'}{2} (6-X')$$

$$\Rightarrow M(X') = -5X'^2 + 37,5X' - 45$$

$$\Rightarrow M(x) = -5x^2 + 157,5x - 1215$$

$$\Rightarrow V(x) = 10x - 157,5$$

• Réactions d'appuis

$$R_0 = -V(0) \Rightarrow R_0 = 52,5 \text{ kN}$$

$$\bullet \begin{cases} V(4^-) = 10 \times 4 + 47,5 \\ V(4^+) = 10 \times 4 - 83,125 \end{cases}$$

$$R_1 = V(4^-) - V(4^+) \Rightarrow R_1 = 130,63 \text{ kN}$$

$$\bullet \begin{cases} V(12^-) = 10 \times 12 - 83,125 \\ V(12^+) = 10 \times 12 - 157,5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R_2 = V(12^-) - V(12^+) \Rightarrow R_2 = 74,34 \text{ kN}$$

$$\bullet R_3 = V(18 \text{ m}) \Rightarrow R_3 = 22,5 \text{ kN}$$

5.8.7 Solution 19

• Numérotation des nœuds



• Nœud 1 : $Ei\omega''_1 = \frac{300 \times 5}{6 \times 10} (10^2 - 5^2) = 1875$

$$\omega'_2 = 0$$

$$\Rightarrow 2(10+10)M_1 + 10M_2 = 6 \times (-1875)$$

$$\Rightarrow 40M_1 + 10M_2 = -11250 \quad (*)$$

• Nœud 2 : $\omega''_2 = \omega'_3 = 0$

$$\Rightarrow 10M_1 + 2(10+10)M_2 = 0$$

$$\Rightarrow 10M_1 + 40M_2 = 0 \quad (**)$$

• Il vient alors que

$$(*) \text{ et } (**) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 40 & 10 \\ 10 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11250 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_1 = -300 \text{ kN.m} \\ M_2 = 75 \text{ kN.m} \end{cases}$$

• Poutre 0① :

$$M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \frac{x}{10}$$

Avec :

$$\begin{cases} 0 < x < 5 \text{ m} : M_{iso}(x) = \frac{300 \times 5x}{10} = 150x \\ 5 < x < 10 \text{ m} : M_{iso}(x) = 300 \times 5 \left(1 - \frac{x}{10}\right) \\ \quad \quad \quad = 1500 - 150x \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} 0 < x < 5 : M(x) = 120x \\ 5 < x < 10 : M(x) = 1500 - 180x \end{cases}$$

Puisque $V(x) = -\frac{dM}{dx}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 5 & V(x) = -120 \\ 5 < x < 10 & V(x) = 180 \end{cases}$$

• Poutre ①② : En posant $X = x - 10$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \left(\frac{10-X}{10} \right) + M_2 \frac{X}{10}$$

avec $M_{iso}(X) = 0$

$$\text{donc } M(X) = 37,5X - 300$$

$$\text{et } M(x) = 37,5x - 675$$

$$\text{puis } V(x) = -37,5$$

• Poutre ②-③ En posant $X' = x - 20$

$$M(X') = M_{iso}(X') + M_2 \left(\frac{10-X'}{10} \right)$$

avec $M_{iso}(X') = 0$

$$\Rightarrow M(X') = 75 - 7,5X'$$

$$\Rightarrow M(x) = 225 - 7,5x$$

$$\Rightarrow V(x) = 7,5$$

• Réactions d'appuis :

$$R_0 = -V(0) \Rightarrow \boxed{R_0 = 120 \text{ kN}}$$

$$\begin{cases} V(10^-) = 180 \\ V(10^+) = -37,5 \end{cases} \Rightarrow R_1 = V(10^-) - V(10^+) \\ \Rightarrow \boxed{R_1 = 217,5 \text{ kN}}$$

$$\begin{cases} V(20^-) = -37,5 \\ V(20^+) = 7,5 \end{cases} \Rightarrow R_2 = (V(20^-) - V(10^+)) \\ \Rightarrow \boxed{R_2 = -45 \text{ kN}}$$

$$R_3 = V(30) \Rightarrow \boxed{R_3 = 7,5 \text{ kN}}$$

5.8.8 Solution 20

• Nœud 1:

$$\begin{cases} M_0 = 0 \\ \omega''_1 = \frac{10 \times 3^3}{24 \times EI_0} = \frac{11,25}{EI_0} \\ \omega'_2 = \frac{-20 \times 4^3}{24 \times 2EI_0} = \frac{-26,67}{EI_0} \end{cases}$$

$$2 \left(\frac{3}{6EI_0} + \frac{4}{6 \times 2EI_0} \right) M_1 + \frac{4}{6 \times 2EI_0} M_2 = \frac{-11,25}{EI_0} - \frac{26,67}{EI_0}$$

$$\Rightarrow 1,67 M_1 + 0,33 M_2 = -37,92$$

• Nœud 2:

$$\begin{cases} \omega''_2 = \frac{20 \times 4^3}{24 \times 2EI_0} = \frac{26,67}{EI_0} \\ \omega'_3 = \frac{-10 \times 4^3}{24 \times 2EI_0} = \frac{-13,33}{EI_0} \end{cases}$$

$$\frac{4}{6 \times 2EI_0} M_1 + 2 \left(\frac{4}{6 \times 2EI_0} + \frac{4}{6 \times 2EI_0} \right) M_2 + \frac{4}{6 \times 2EI_0} M_3 = \frac{-40}{EI_0}$$

$$\Rightarrow 0,33 M_1 + 1,33 M_2 + 0,33 M_3 = -40$$

• Nœud 3:

$$\begin{cases} \omega''_3 = -\omega'_3 = \frac{13,33}{EI_0} \\ \omega'_4 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{4}{6 \times 2EI_0} M_2 + 2 \left(\frac{4}{6 \times 2EI_0} + \frac{3}{6 \times 1,5EI_0} \right) M_3 = \frac{-13,33}{EI_0}$$

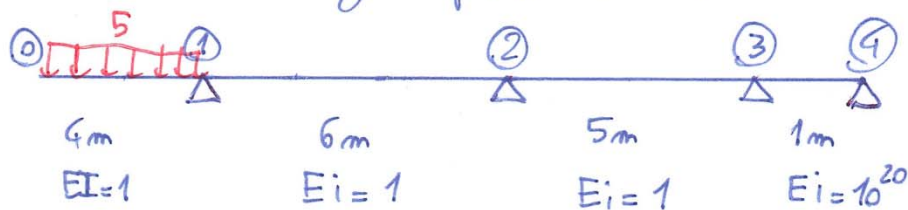
$$\Rightarrow 0,33 M_2 + 1,33 M_3 = -13,33$$

$$\begin{pmatrix} 1,67 & 0,33 & 0 \\ 0,33 & 1,33 & 0,33 \\ 0 & 0,33 & 1,33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -37,92 \\ -40 \\ -13,33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 = -17,83 \text{ kN.m} \\ M_2 = -24,68 \text{ kN.m} \\ M_3 = -3,90 \text{ kN.m} \end{cases}$$

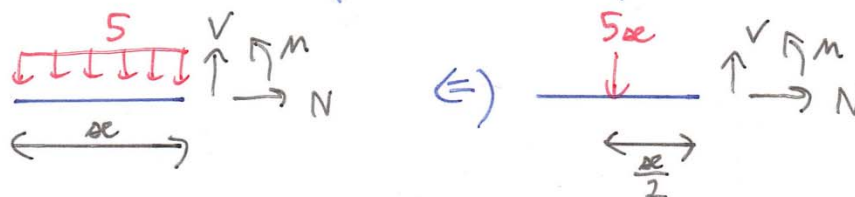
5.8.9 Solution 21

- Pour tenir compte de l'encastrement, on ajoute une poutre fictive avec Ei infiniment plus grand que pour le reste de la structure et une longueur fictive de 1 m



- ⚠ On ne peut pas utiliser la formule des 3 moments au nœud ① car le nœud ② n'est pas appuyé. On effectue donc une coupe pour connaître M_1 .

- Poutre ②① : coupe en x tel que $0 < x < 4$ m



$$M(x) + 5x \times \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = -2,5x^2}$$

$$V(x) - 5x = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = 5x}$$

$$M_1 = M(x=4\text{ m}) \Rightarrow \boxed{M_1 = -40 \text{ kN.m}}$$

- Nœud ② : $w''_2 = w'_3 = 0$ et $M_1 = -40$

$$6M_1 + 2(6+5)M_2 + 5M_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{22M_2 + 5M_3 = 240}$$

• Nœud 3 : $\omega''_3 = \omega'_4 = 0$ et $M_4 = 0$

$$\frac{5}{6 \times 1} M_2 + 2 \left(\frac{5}{6 \times 1} + \frac{1}{6 \times 10^{20}} \right) M_3 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{5M_2 + 10M_3 = 0}$$

•
$$\begin{pmatrix} 22 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_2 \\ M_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} M_2 = 12,31 \text{ kN.m} \\ M_3 = -6,15 \text{ kN.m} \end{cases}}$$

• Poutre ①② En posant $X = a - 4$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_1 \frac{6-X}{6} + M_2 \frac{X}{6}$$

Avec $M_{iso}(X) = 0 \Rightarrow M(X) = 8,718X - 40$

$$\Rightarrow \boxed{M(a) = 8,718a - 74,87}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(a) = -8,718}$$

- Poutre ②③ : En posant $x' = x - 10$

$$M_{iso}(x') = 0$$

$$\text{donc } M(x') = M_2 \frac{5-x'}{5} + M_3 \frac{x'}{5}$$

$$\Rightarrow M(x') = 12,31 - 3,692x'$$

$$\Rightarrow \boxed{M(x) = 49,23 - 3,692x}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(x) = 3,692}$$

- Réactions d'appuis

$$V(4^-) = 20 \text{ kN}$$

$$V(4^+) = -8,718 \text{ kN}$$

$$\Rightarrow R_1 = V(4^-) - V(4^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_1 = 28,718 \text{ kN}}$$

$$V(10^-) = -8,718$$

$$V(10^+) = 3,692$$

$$\Rightarrow R_2 = V(10^-) - V(10^+)$$

$$\Rightarrow \boxed{R_2 = -12,41 \text{ kN}}$$

$$R_3 = V(15 \text{ m}) \Rightarrow \boxed{R_3 = 3,692 \text{ kN}}$$

$$M_3 = M(15 \text{ m}) \Rightarrow \boxed{M_3 = -6,15 \text{ kN.m}}$$

5.8.10 Solution 22

• Nœud ① : $\begin{cases} M_0 = M_1 & (\text{extrémités non encastées}) \\ \omega'_2 = \omega''_1 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow 2(3+3)M_1 = 6 \times 200000 \cdot 10^6 \times \frac{78}{100^4} \left(\frac{0.1}{3} + \frac{0.1}{3} \right)$$

$$\Rightarrow M_1 = 5200 \text{ N.m}$$

• Poutre ①① : $M(x) = M_{iso}(x) + M_1 \frac{x}{3}$

$$M_{iso}(x) = 0 \Rightarrow M(x) = 1733x$$

$$\Rightarrow V(x) = -1733$$

• Poutre ①② :

Par symétrie par rapport à ①

$$\Rightarrow M(x) = -1733x + 10400$$

$$\Rightarrow V(x) = 1733$$

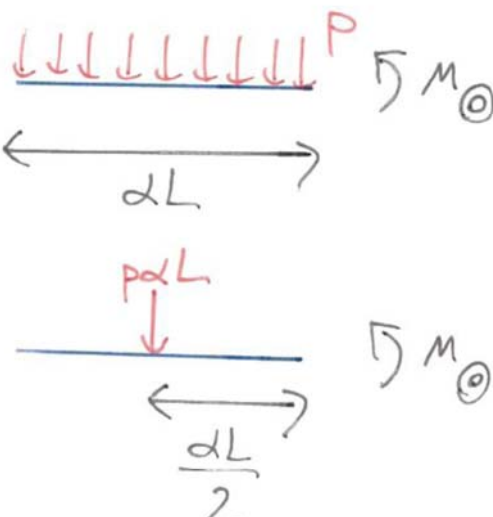
• Réactions d'appuis

$$\Rightarrow R_0 = -V(0) \Rightarrow R_0 = 1733 \text{ N}$$

et $R_2 = 1733 \text{ N}$

$$\begin{cases} V(3^-) = -1733 \\ V(3^+) = 1733 \end{cases} \Rightarrow R_1 = 3466 \text{ N}$$

5.8.11 Solution 23

- α : tel que $M_{\textcircled{0}} = M_{\textcircled{1}}$
- Par symétrie, $M_{\textcircled{0}} = M_{\textcircled{2}}$
 - Coupe en $\textcircled{0}$: 

$$M_{\textcircled{0}} + p\alpha L \times \frac{\alpha L}{2} = 0 \Rightarrow M_{\textcircled{0}} = -\frac{p\alpha^2 L}{2}$$

- formule des 3 moments à l'appui $\textcircled{1}$

$$\omega''_1 = -\omega'_2 = \frac{pL^3}{24Ei}$$

$$\Rightarrow LM_{\textcircled{0}} + 4LM_{\textcircled{1}} + LM_{\textcircled{2}} = 6Ei \left(\frac{-pL^3}{24Ei} - \right)$$

$$\Rightarrow 4M_{\textcircled{1}} + 2M_{\textcircled{0}} = -\frac{pL^2}{2}$$

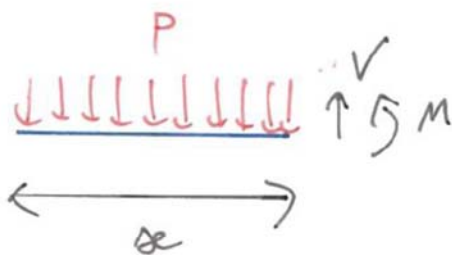
$$\Rightarrow M_{\textcircled{1}} = \frac{p\alpha^2 L^2}{2} - \frac{pL^2}{4}$$

2/

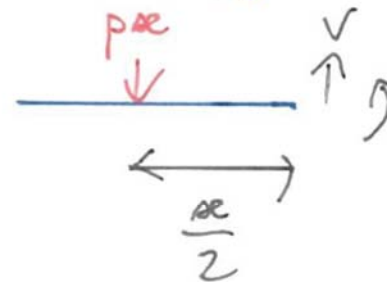
Traçer $V(x)$ et $M(x)$

- Coupure avant ②

$$: 0 < x < \frac{L}{\sqrt{8}}$$



$\Leftrightarrow$



$$\Rightarrow \begin{cases} V - p x = 0 \\ M + \frac{p x^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V = \\ M \end{cases}$$

- entre ② et ① : $\frac{L}{\sqrt{8}} < x < L \left(1 + \frac{1}{\sqrt{8}}\right)$

Posons $\boxed{X = x - \frac{L}{\sqrt{8}}}$

$$M(X) = M_{iso}(X) + M_{②} \frac{L-X}{L} + M_{①} \frac{X}{L}$$

avec $M_{iso}(X) = \frac{pX}{2} (L-X)$

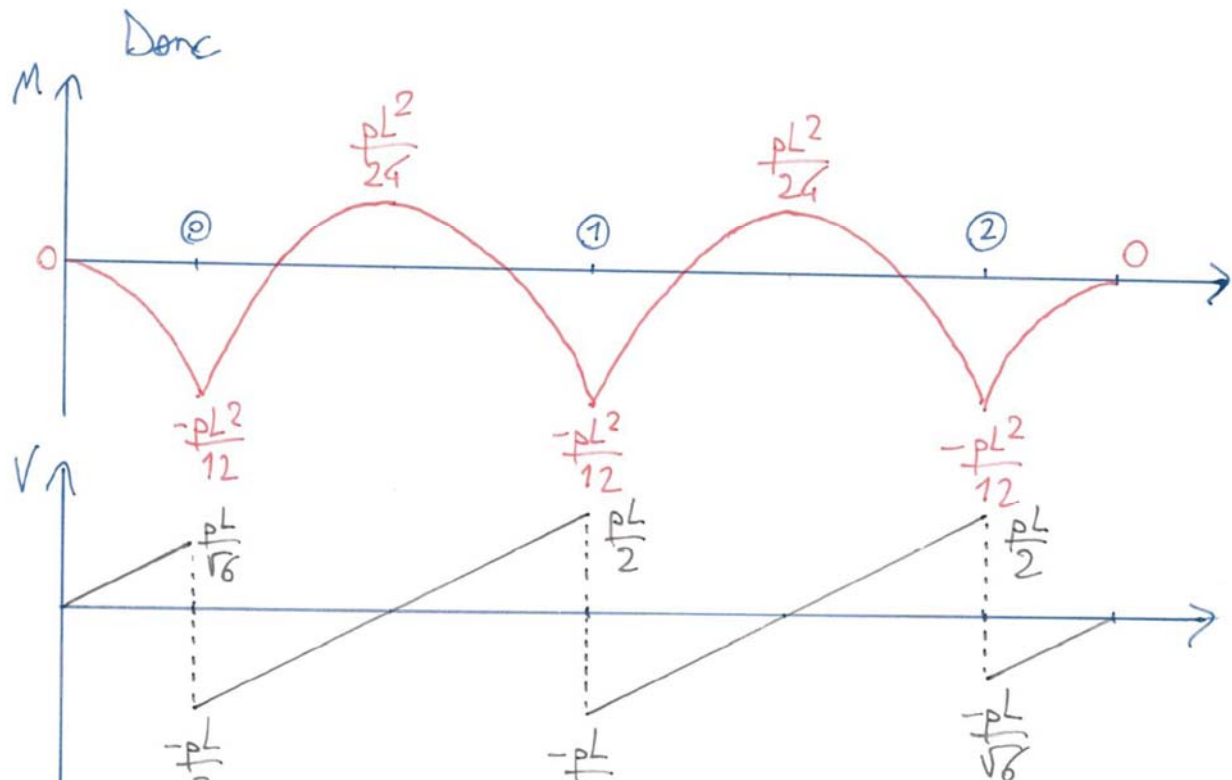
$$M \quad M \quad p \left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 L^2 \quad , 2$$

- $V(X)=0 \Leftrightarrow X=\frac{L}{2}$

$$\Rightarrow M_{\max} = M\left(X=\frac{L}{2}\right) = \frac{pL^2}{24}$$

- Au delà de ①, on sait que

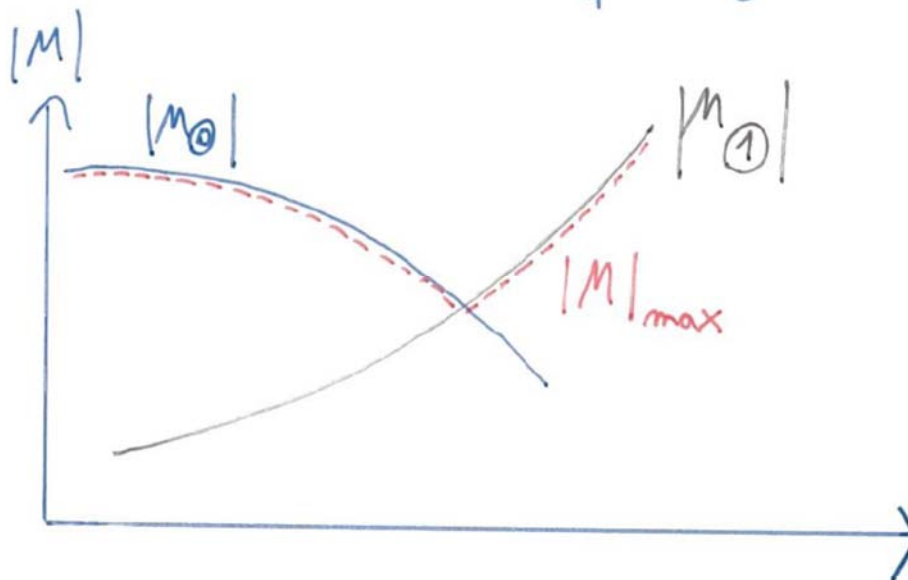
$\left\{ \begin{array}{l} \text{la courbe } M \text{ est symétrique par rapport à ①} \\ \text{la courbe } V \text{ est antisymétrique par rapport à ①} \end{array} \right.$



• α pour avoir $\min(|M|_{\max})$

En remarquant que $|M|_{\max}$ est au niveau des 0

et que $\begin{cases} M_{\textcircled{0}}(\alpha) = -\frac{p\alpha^2 L^2}{2} \text{ est une fonction décroissante} \\ M_{\textcircled{1}}(\alpha) = \frac{p\alpha^2 L^2}{4} - \frac{pL^2}{8} \text{ est une fonction croissante} \end{cases}$



donc le minimum de $|M|_{\max}$ est lorsque $M_{\textcircled{0}} =$

et donc $\boxed{\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}}$

• Calcul de flèche

• flèche sur la console : $M(x) = -\frac{px^2}{2}$

D'après l'énoncé

$$\begin{cases} f\left(x = \frac{L}{\sqrt{6}}\right) = 0 \\ \frac{df}{dx}\left(x = \frac{L}{\sqrt{6}}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -0,0012 p L^4 + 0,4082 A L + B = 0 \\ -0,0113 p L^3 + A = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 0,0113 p L^3 \\ B = -0,0034 p L^4 \end{cases}$$

donc $\boxed{|f|_{\max} = \frac{0,0034 p L^4}{Ei}}$

• flèche sur ②-① : $M(X) = -\frac{P}{12} (6X^2 - 6LX +$

$$\begin{cases} Ei \frac{df}{dx}(X) = \frac{P}{12} (2X^3 - 3LX^2 + L^2X + C) \\ Ei f(X) = \frac{P}{12} \left(\frac{X^4}{2} - LX^3 + \frac{L^2X^2}{2} + CX + \right. \end{cases}$$

D'après l'énoncé en $X = 0$ (c'est-à-dire à l

$$|f|_{\max} = f\left(X = \frac{L}{2}\right) = \frac{pL^4}{384EI}$$

$$\Rightarrow |f|_{\max} = \frac{0,0026 pL^4}{EI}$$

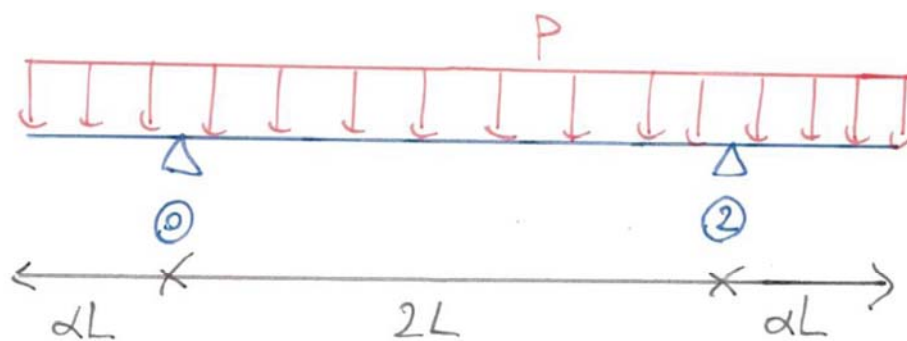
Au final, la flèche est maximale est au niveau de la console :

$$|f|_{\max} = \frac{0,0036 pL^4}{EI}$$

α max pour éviter le soulèvement à ①

Méthode des forces (en utilisant $R_{①}$ comme inconnue hyp.)

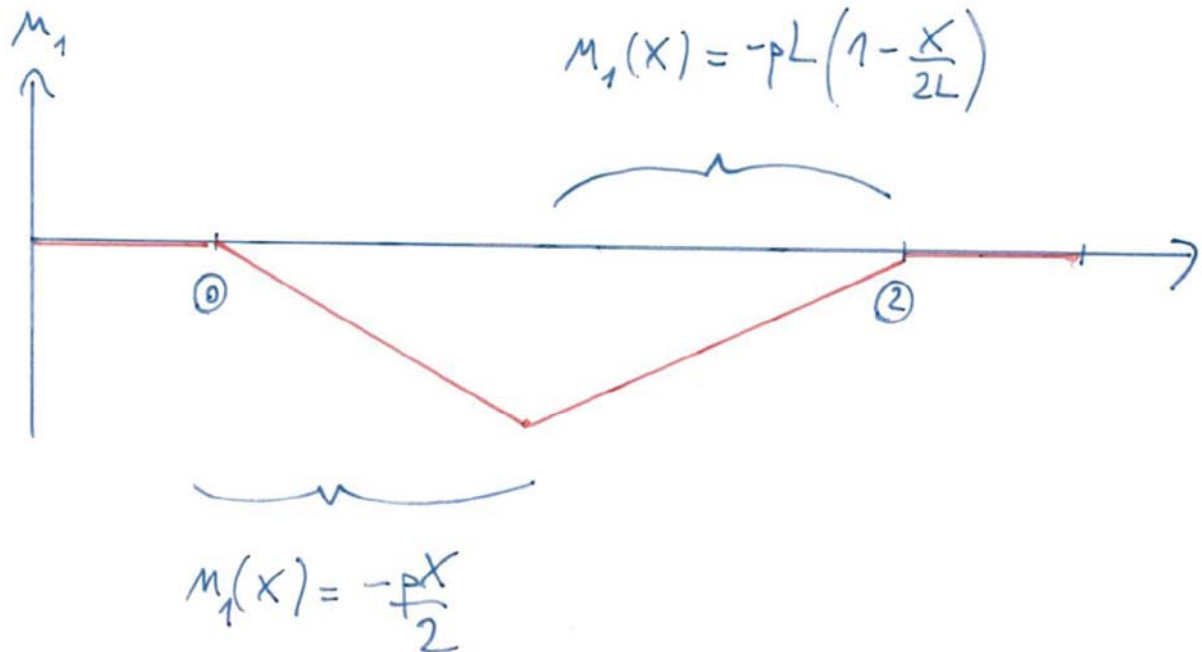
[S₀]



[S₁]

1
n

• Structure S_1 , en posant $X = x - \alpha L$



• Structure S_0 : $M_{0,0} = -\frac{\alpha^2 L^2 p}{2}$

$$M_{2,0} = M_{0,0}$$

entre 0 et 2 :

$$M_{iso}(X) = \frac{pX}{2}(2L - X)$$

$$\Rightarrow M_o(X) = \frac{pX}{2}(2L - X) - \frac{\alpha^2 L^2 p}{2} \left(\frac{2L - X}{2L} \right) - \frac{\alpha^2 L}{2}$$

$$\Rightarrow M_o(X) = -\frac{p}{2} \left(X^2 - 2LX + \alpha^2 L^2 \right)$$

$$Ei \delta_{11} = \int_0^{2L} M_1^2 dX = \int_0^L \left(-\frac{pX}{2} \right)^2 dX + \int_L^{2L} \left[-pL \left(1 - \frac{X}{2L} \right) \right]^2 dX$$

$$= \frac{p^2 L^3}{6}$$

$$Ei \delta_{01} = \int_0^{2L} M_0 M_1 dX$$

$$= \int_0^L \left(-\frac{pX}{2} \right) \left(-\frac{p}{2} (X^2 - 2LX + \alpha^2 L^2) \right) dX$$

$$+ \int_L^{2L} \left[-pL \left(1 - \frac{X}{2L} \right) \right] \left[-\frac{p}{2} (X^2 - 2LX + \alpha^2 L^2) \right] dX$$

$$= \frac{p^2 L^4}{24} (6\alpha^2 - 5)$$

Donc $\frac{p^2 L^3}{6} R_{\text{①}} + \frac{p^2 L^4}{24} (6\alpha^2 - 5) = 0$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{5 - 6\alpha^2}{4} L > 0$$

5.8.12 Solution 24

Cosp

$$\begin{cases} M_{\textcircled{0}} = M_{\textcircled{3}} = 0 & (\text{extrémité non encastree}) \\ M_{\textcircled{1}} = M_{\textcircled{2}} & (\text{symetrie du probleme}) \end{cases}$$

• rend ① : $\omega''_1 = -\omega'_2 = \frac{-pL^3}{24EI}$

$$4LM_{\textcircled{1}} + LM_{\textcircled{2}} = 6EI \left(\frac{-pL^3}{24EI} - \frac{pL^3}{24EI} \right)$$

$$\Rightarrow 5M_{\textcircled{1}} = -\frac{pL^2}{2} \Rightarrow M_{\textcircled{1}} = -\frac{pL^2}{10}$$

• entre ① et ② : $M_{\text{iso}}(x) = \frac{pax}{2} (L-x)$

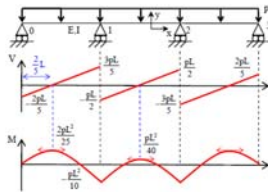
$$\Rightarrow M(x) = \frac{pax}{2} (L-x) - \frac{pL^2}{10} \left(\frac{x}{L} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M(x) = -\frac{pax^2}{2} + \frac{2pLx}{5} \\ V(x) = pax - \frac{2pL}{5} \end{cases}$$

• Entre ① et ② : $M_{\text{iso}}(X) = \frac{pX}{2} (L-X)$ avec $\boxed{X}$

$$\begin{cases} M(X) = -\frac{pX^2}{2} + \frac{pLX}{2} - \frac{pL^2}{10} \\ V(X) = pX - \frac{pL}{2} \end{cases}$$

- Entre ② et ③ $\left\{ \begin{array}{l} \text{symétrie de } M \\ \text{antisymétrie de } V \end{array} \right.$ par rapport au centre



Cas 5

$$\text{Nœud ①: } 4L M_{①} + L M_{②} = 6Ei \left[\frac{\delta - 0}{L} + \frac{\delta - \delta}{L} \right]$$

$$\Rightarrow M_{①} = M_{②} = \frac{6Ei\delta}{5L^2}$$

• entre ② et ① : $M_{iso}(x) = 0$

$$\Rightarrow M(x) = \frac{6Ei\delta}{5L^2} \cdot \frac{x}{L} \Rightarrow \boxed{M(x) = \frac{6Ei\delta x}{5L^3}}$$

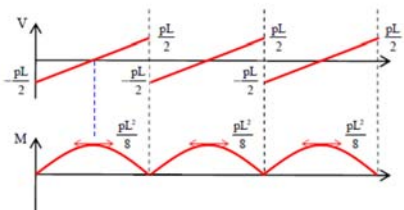
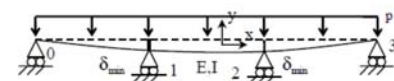
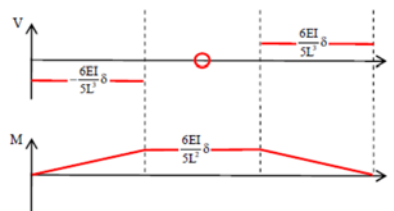
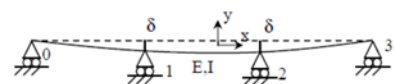
$$\Rightarrow \boxed{V(x) = -\frac{6Ei\delta}{5L^3}}$$

• entre ① et ② : posons $X = x - L$

$$M(X) = \frac{6Ei\delta}{5L^2} \cdot \left(\frac{L-X}{L} \right) + \frac{6Ei\delta}{5L^2} \cdot \frac{X}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} M(X) = \frac{6Ei\delta}{5L^2} \\ V(X) = 0 \end{cases}}$$

• entre ② et ③ : $\begin{cases} \text{symétrie de } M \\ \text{antisymétrie de } V \end{cases}$ par rapport au centre



$$\boxed{\delta_{\min}}$$

Au niveau de ① : $M_{①} \geq 0$

$$\Rightarrow -\frac{pL^2}{10} + \frac{6Ei}{5L^2} \delta_{\min} \geq 0$$

$$\Rightarrow \delta_{\min} = \frac{pL^2}{10} \cdot \frac{5L^2}{6Ei}$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta_{\min} = \frac{pL^4}{12Ei}}$$

Réaction tjs vers le haut ?

Réaction vers le haut si $V(x^-) - V(x^+) > 0$

cette condition est respectée quelque soit l'appui

6. Méthode des déplacements

6.1 Domaine d'application

- Problème plan (structure plane dont le chargement est dans son plan)
- Petites déformations
- Domaine élastique et linéaire du matériau
- Liaisons parfaites
- Poutres droites
- Section constante

6.2 Notions de nœuds

On appelle nœud chaque extrémité de poutres qui composent la structure considérée.

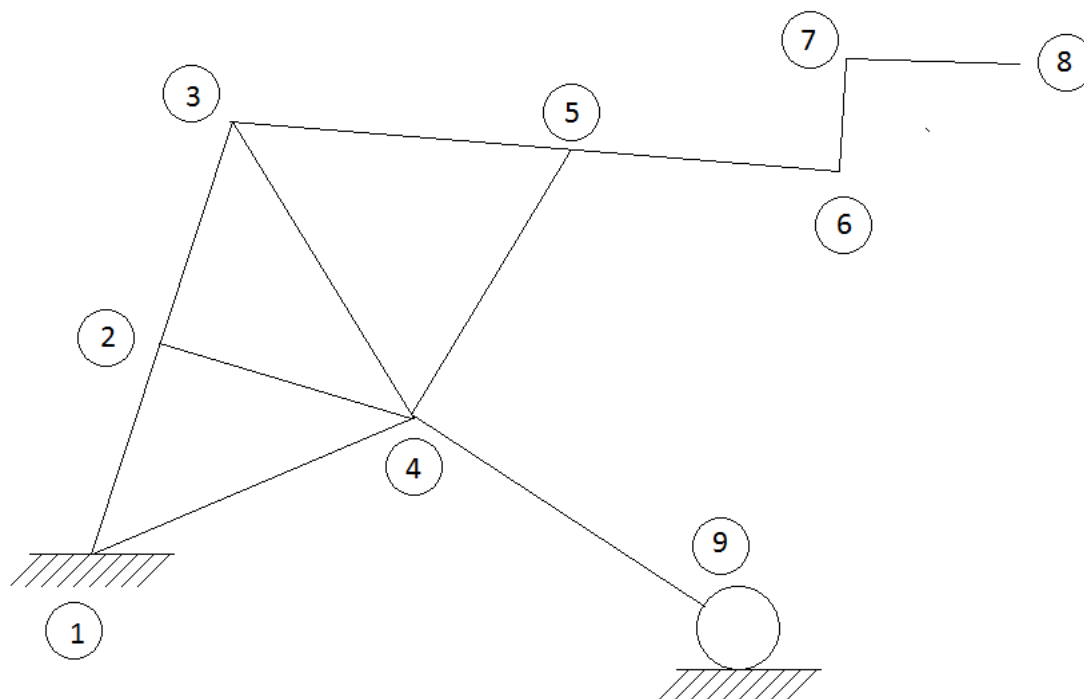
Exemples

- intersection entre plusieurs poutres
- intersection entre structure et appuis extérieurs
- extrémité libre

Illustration

La structure suivante est composée de :

- 9 nœuds
- 11 poutres



6.3 Déplacements et rotations dans le repère local



u_{ij} : déplacement selon $\vec{x}$ du repère local du nœud i pour la poutre $i - j$ [m]

v_{ij} : déplacement selon $\vec{y}$ du repère local du nœud i pour la poutre $i - j$ [m]

ω_{ij} : rotation selon le repère local du nœud i pour la poutre $i - j$ [rad]

Remarque :

les notations sont similaires pour le nœud j (où les déplacements sont notés u_{ji} , v_{ji} et ω_{ji}).

6.4 Notations entre repère local et repère global

Les déplacements et rotation dans le repère local seront notés en minuscule comme indiqué précédemment.

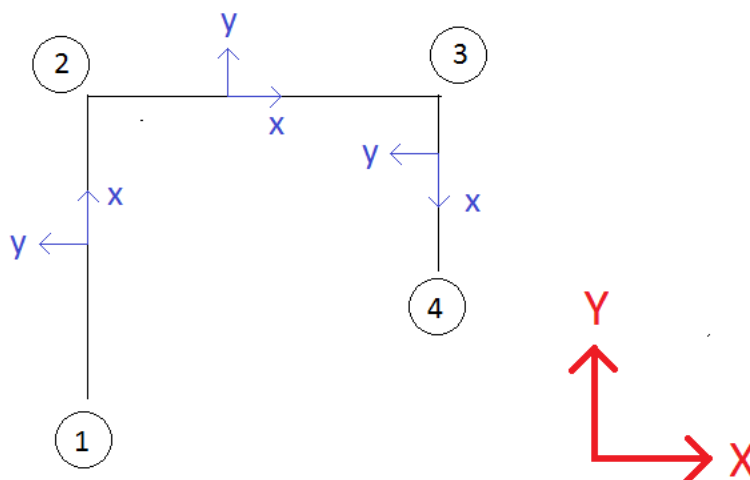
Ces mêmes déplacements sont notés en majuscule dans le repère global :

U_i : déplacement selon $\vec{X}$ du repère global du nœud i [m]

V_i : déplacement selon $\vec{Y}$ du repère global du nœud i [m]

Ω_i : rotation selon le repère global du nœud i [rad]

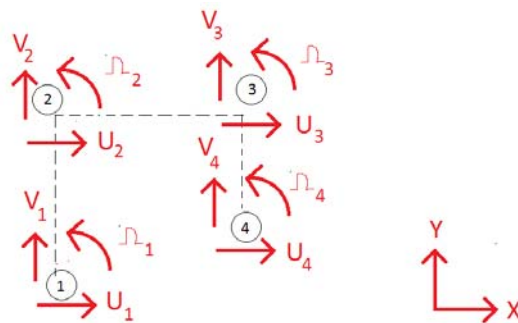
Illustration



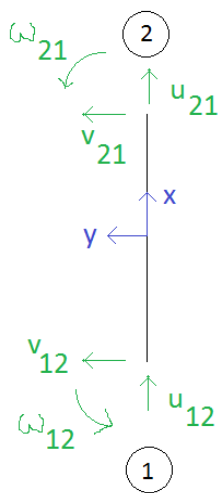
Exprimer les déplacements et rotations du repère local en fonction des mêmes déplacements et rotation dans le repère global

Solution

Dans le repère global, les déplacements des nœuds sont notés :



Dans les différents repères locaux :



$$U_1 = -v_{12}$$

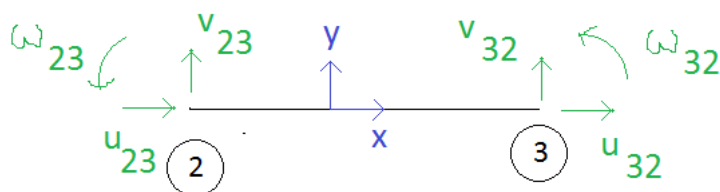
$$V_1 = u_{12}$$

$$\Omega_1 = \omega_{12}$$

$$U_2 = -v_{21}$$

$$V_2 = u_{21}$$

$$\Omega_2 = \omega_{21}$$



$$U_2 = u_{23}$$

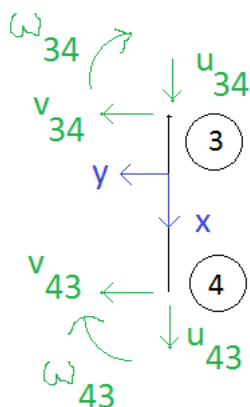
$$V_2 = v_{23}$$

$$\Omega_2 = \omega_{23}$$

$$U_3 = u_{32}$$

$$V_3 = v_{32}$$

$$\Omega_3 = \omega_{32}$$



$$U_3 = -v_{34}$$

$$V_3 = -u_{34}$$

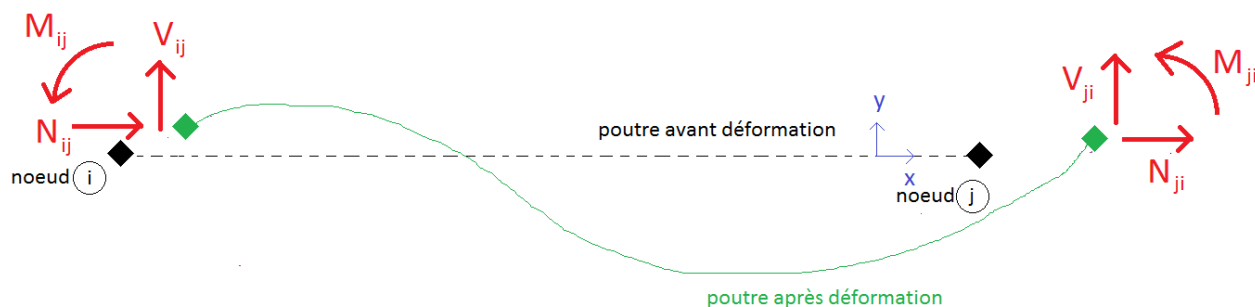
$$\Omega_3 = -\omega_{34}$$

$$U_4 = -v_{43}$$

$$V_4 = -u_{43}$$

$$\Omega_4 = -\omega_{43}$$

6.5 Torseurs aux nœuds



N_{ij} : effort normal selon le repère local au niveau du nœud i pour la poutre $i - j$ [N]

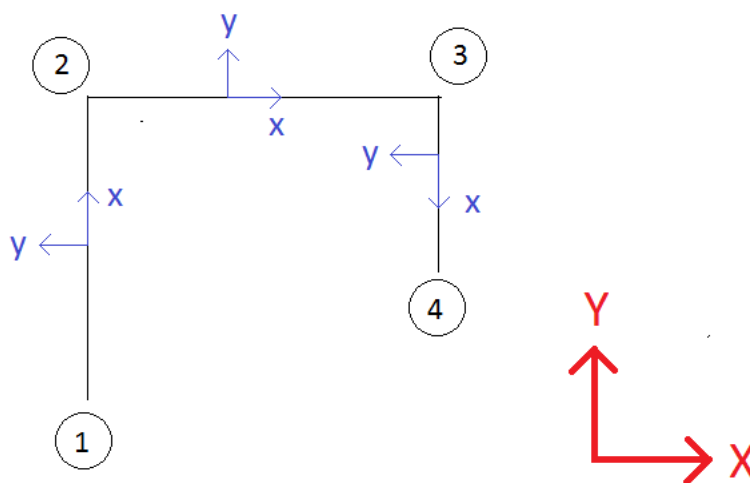
V_{ij} : effort tranchant selon le repère local au niveau du nœud i pour la poutre $i - j$ [N]

M_{ij} : moment fléchissant selon le repère local au niveau du nœud i pour la poutre $i - j$ [N.m]

Remarque : les notations sont similaires pour le nœud j avec l'indice « ji » en remplacement de l'indice « ij ».

Une fois les torseurs écrits aux nœuds selon les repères locaux, il est nécessaire de savoir réaliser un équilibre au niveau de ces mêmes nœuds.

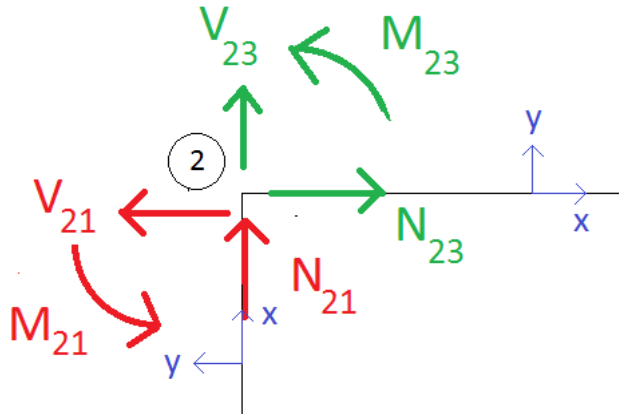
Illustration



Ecrire l'équilibre en force et en moment au niveau du nœud 2.

Solution

Les torseurs au niveau du nœud 2 écrits par rapport aux repères locaux sur les poutres 1-2 et 2-3 sont :



Ainsi, l'équilibre des forces et des moments se traduit par les équations suivantes :

$$N_{23} - V_{21} = 0$$

$$N_{21} + V_{23} = 0$$

$$M_{21} + M_{23} = 0$$

6.6 Relations entre déplacements et rotations et torseurs aux nœuds

La poutre considérée se situe entre les nœuds $\boxed{i}$ et $\boxed{j}$ et l'axe $\vec{x}$ du repère local est dirigé de $\boxed{i}$ vers $\boxed{j}$.

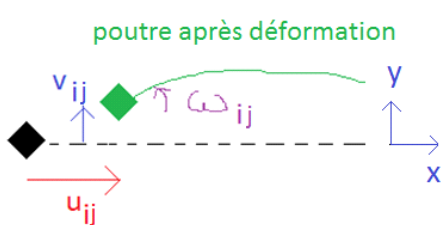
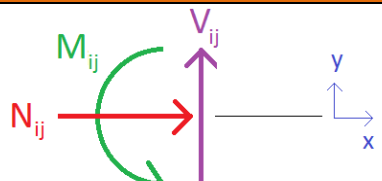
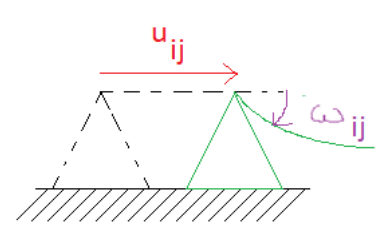
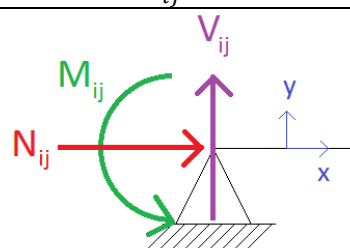
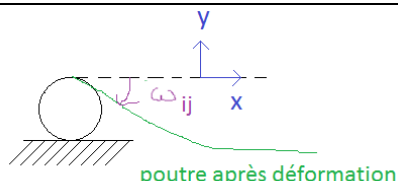
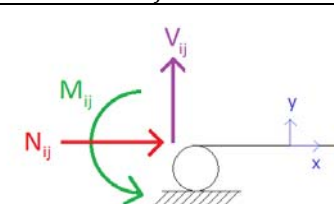
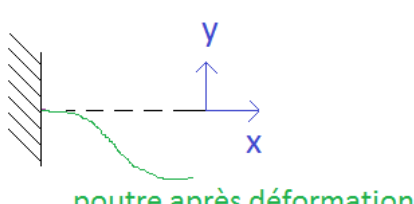
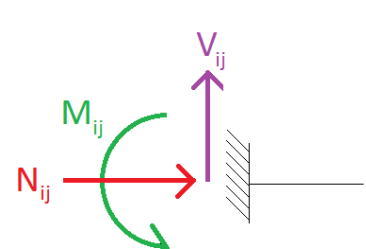
Notations complémentaires :

L : longueur de la poutre	[m]
E : module de Young du matériau	[Pa]
I : moment d'inertie de la section de la poutre	[m ⁴]
A : section de la poutre	[m ²]

Nœud $\boxed{i}$	Nœud $\boxed{j}$
$N_{ij} = -\frac{EA}{L}(u_{ji} - u_{ij}) + N_{ij}^0$	$N_{ji} = \frac{EA}{L}(u_{ji} - u_{ij}) + N_{ji}^0$
$V_{ij} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) - \frac{12EI}{L^3}(v_{ji} - v_{ij}) + V_{ij}^0$	$V_{ji} = -\frac{6EI}{L^2}(\omega_{ij} + \omega_{ji}) + \frac{12EI}{L^3}(v_{ji} - v_{ij}) + V_{ji}^0$
$M_{ij} = \frac{4EI\omega_{ij}}{L} + \frac{2EI\omega_{ji}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{ji} - v_{ij}) + M_{ij}^0$	$M_{ji} = \frac{2EI\omega_{ij}}{L} + \frac{4EI\omega_{ji}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{ji} - v_{ij}) + M_{ji}^0$

$N_{ij}^0, N_{ji}^0, V_{ij}^0, V_{ji}^0, M_{ij}^0$ et M_{ji}^0 sont les valeurs des torseurs au niveau des nœuds $\boxed{i}$ et $\boxed{j}$ lorsque la poutre $\boxed{i} - \boxed{j}$ est considérée bi-encastée et que le chargement initial est conservé.

6.7 Valeurs connues au niveau des appuis et des extrémités libres

Liaisons	Valeurs connues	
	en déplacement et en rotation	du torseur
Extrémité libre (illustration au nœud i)	 Aucune valeur connue	 $N_{ij} = 0$ $V_{ij} = 0$ $M_{ij} = 0$
Appui simple (illustration au nœud i)	 $v_{ij} = 0$	 $N_{ij} = 0$ $M_{ij} = 0$
Rotule (illustration au nœud i)	 $u_{ij} = 0$ $v_{ij} = 0$	 $M_{ij} = 0$
Encastrement (illustration au nœud i)	 $u_{ij} = 0$ $v_{ij} = 0$ $\omega_{ij} = 0$	 Aucune valeur connue

6.8 Méthode

- I. Numéroter chaque nœud de la structure
- II. Pour chaque nœud intérieur de la structure (les nœuds en extrémité libres et au niveau des réactions d'appuis sont exclus).
 - a. Dessiner dans le repère local le torseur
 - b. Ecrire les 3 équations d'équilibre dans le repère global selon
 - i. La direction $\vec{X}$
 - ii. La direction $\vec{Y}$
 - iii. Le moment fléchissant autour de $\vec{Z}$
- III. Au niveau des nœuds en extrémités libres et au niveau des réactions d'appuis, ajouter en équation les éléments du torseur qui sont nuls.
- IV. On a obtenu autant d'équations que d'inconnues. Remplacer les torseurs aux nœuds par les déplacements et rotations aux nœuds dans le repère local de chaque poutre (en tenant compte des valeurs connues au niveau des réactions d'appuis)
- V. Remplacer les notations des repères locaux par les notations du repère global pour les déplacements et rotations.
- VI. Résoudre le système obtenu
- VII. Calculer les torseurs au niveau des nœuds
- VIII. Obtenir les torseurs en tout point par utilisation de relations entre moments et efforts tranchant entre deux sections d'une poutre droite dont les moments sont connus

Adaptation de la relation du chapitre 2 avec : $\begin{cases} M_A = -M_{ij} \\ M_B = M_{ji} \end{cases}$

Ainsi, pour chaque poutre $[i] - [j]$,

Le moment à l'abscisse x est égal à :

$$M_{ij}(x) = M_{iso}(x) - M_{ij} \cdot \frac{L-x}{L} + M_{ji} \cdot \frac{x}{L}$$

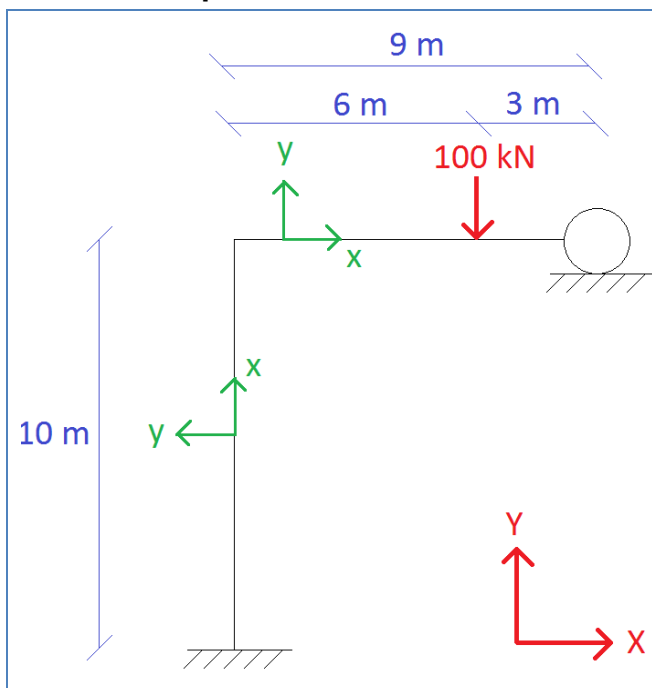
L'effort tranchant à l'abscisse x est égal à :

$$V_{ij}(x) = V_{iso}(x) + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

ATTENTION :

Ces relations ne doivent pas être utilisées pour une portion de poutre en console.

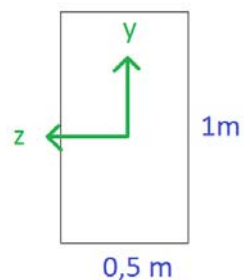
6.9 Exemple



Calculer le déplacement et la rotation du nœud à l'intersection des poutres, ainsi que la rotation de la poutre au niveau de la rotule.

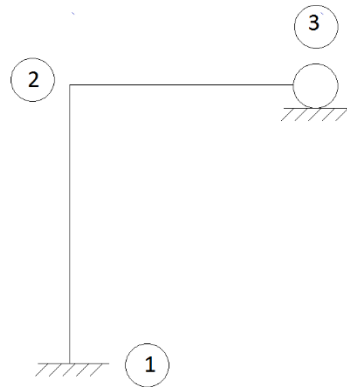
Données

- $E = 10\,000\text{ MPa}$
- La section est



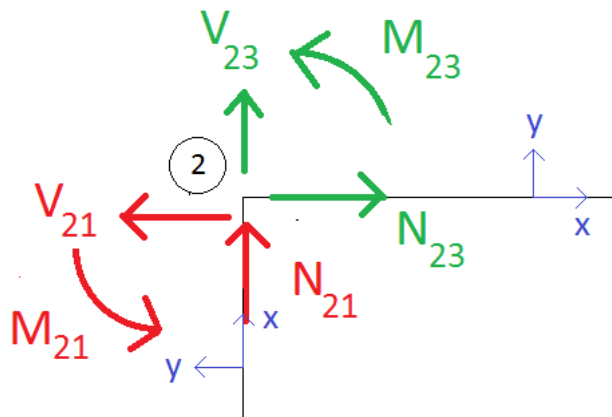
Solution

I. Numéroté chaque nœud de la structure



II. Il existe un seul nœud intérieur : le nœud [2] :

a. Dessin dans le repère local du torseur



b. Ecrire les 3 équations d'équilibre dans le repère global selon

i. La direction $\vec{X}$: $N_{23} - V_{21} = 0$

ii. La direction $\vec{Y}$: $N_{21} + V_{23} = 0$

iii. Le moment fléchissant autour de $\vec{Z}$: $M_{21} + M_{23} = 0$

III. On sait qu'au niveau nœud [3], le moment est nul puisqu'on a une rotule donc $M_{32} = 0$

IV.

$N_{23} = -\frac{EA}{L_{23}}(u_{32} - u_{23}) + N_{23}^0$	Avec : • $u_{32} = 0$ • $N_{23}^0 = 0$ • $L_{23} = 9 \text{ m}$
$V_{21} = -\frac{6EI}{L_{12}^2}(\omega_{12} + \omega_{21}) + \frac{12EI}{L_{12}^3}(v_{21} - v_{12}) + V_{21}^0$	Avec : • $\omega_{12} = 0$ • $v_{12} = 0$ • $V_{21}^0 = 0$ • $L_{12} = 10 \text{ m}$

Donc :

$$N_{23} - V_{21} = 0 \Leftrightarrow \frac{EAu_{23}}{9} + \frac{6EI\omega_{21}}{10^2} - \frac{12EIv_{21}}{10^3} = 0$$

$N_{21} = \frac{EA}{L_{12}}(u_{21} - u_{12}) + N_{21}^0$	Avec : • $u_{12} = 0$ • $N_{21}^0 = 0$ • $L_{12} = 10 \text{ m}$
$V_{23} = \frac{6EI}{L_{23}^2}(\omega_{23} + \omega_{32}) - \frac{12EI}{L_{23}^3}(v_{32} - v_{23}) + V_{23}^0$	Avec : • $v_{32} = 0$ • $L_{23} = 9 \text{ m}$ • $V_{23}^0 = \frac{Pb^2}{L_{23}^3}(3a + b) = \frac{7P}{27}$

Donc :

$$N_{21} + V_{23} = 0 \Leftrightarrow \frac{EAu_{21}}{10} + \frac{6EI}{9^2}(\omega_{23} + \omega_{32}) + \frac{12EIv_{23}}{9^3} + \frac{7P}{27} = 0$$

$M_{21} = \frac{2EI\omega_{12}}{L_{12}} + \frac{4EI\omega_{21}}{L_{12}} - \frac{6EI}{L_{12}^2}(v_{21} - v_{12}) + M_{21}^0$	Avec : • $\omega_{12} = 0$ • $v_{12} = 0$ • $L_{12} = 10 \text{ m}$ • $M_{21}^0 = 0$
$M_{23} = \frac{4EI\omega_{23}}{L_{23}} + \frac{2EI\omega_{32}}{L_{23}} - \frac{6EI}{L_{23}^2}(v_{32} - v_{23}) + M_{23}^0$	Avec : • $v_{32} = 0$ • $L_{23} = 9 \text{ m}$ • $M_{23}^0 = \frac{Pab^2}{L_{23}^2} = \frac{2P}{3}$

Donc :

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Leftrightarrow \frac{4EI\omega_{21}}{10} - \frac{6EIv_{21}}{10^2} + \frac{4EI\omega_{23}}{9} + \frac{2EI\omega_{32}}{9} + \frac{6EIv_{23}}{9^2} + \frac{2P}{3} = 0$$

$M_{32} = \frac{2EI\omega_{23}}{L_{23}} + \frac{4EI\omega_{32}}{L_{23}} - \frac{6EI}{L_{23}^2}(v_{32} - v_{23}) + M_{32}^0$	Avec : • $v_{32} = 0$ • $L_{23} = 9 \text{ m}$ • $M_{32}^0 = -\frac{Pa^2b}{L_{23}^2} = -\frac{4P}{3}$
---	---

Donc

$$M_{32} = \frac{2EI\omega_{23}}{9} + \frac{4EI\omega_{32}}{9} + \frac{6EIv_{23}}{9^2} - \frac{4P}{3} = 0$$

V. Remplacer les notations des repères locaux par les notations du repère global pour les déplacements et rotations.

Repère local	Repère global
u_{21}	V_2
u_{23}	U_2
v_{21}	$-U_2$
v_{23}	V_2
ω_{21}	Ω_2
ω_{23}	Ω_2
ω_{32}	Ω_3

Donc

$$\frac{EAu_{23}}{9} + \frac{6EI\omega_{21}}{10^2} - \frac{12EIv_{21}}{10^3} = 0 \Leftrightarrow \frac{EAU_2}{9} + \frac{6EI\Omega_2}{10^2} + \frac{12EIU_2}{10^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow U_2 \left(\frac{EA}{9} + \frac{12EI}{10^3} \right) + \frac{6EI\Omega_2}{10^2} = 0$$

$$\frac{EAu_{21}}{10} + \frac{6EI}{9^2} (\omega_{23} + \omega_{32}) + \frac{12EIv_{23}}{9^3} + \frac{7P}{27} = 0$$

$$\Leftrightarrow V_2 \left(\frac{EA}{10} + \frac{12EI}{9^3} \right) + \frac{6EI}{9^2} (\Omega_2 + \Omega_3) + \frac{7P}{27} = 0$$

$$\frac{4EI\omega_{21}}{10} - \frac{6EIv_{21}}{10^2} + \frac{4EI\omega_{23}}{9} + \frac{2EI\omega_{32}}{9} + \frac{6EIv_{23}}{9^2} + \frac{2P}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4EI\Omega_2}{10} + \frac{6EIU_2}{10^2} + \frac{4EI\Omega_2}{9} + \frac{2EI\Omega_3}{9} + \frac{6EIV_2}{9^2} + \frac{2P}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{38EI\Omega_2}{45} + \frac{6EIU_2}{10^2} + \frac{2EI\Omega_3}{9} + \frac{6EIV_2}{9^2} + \frac{2P}{3} = 0$$

$$\frac{2EI\omega_{23}}{9} + \frac{4EI\omega_{32}}{9} + \frac{6EIv_{23}}{9^2} - \frac{4P}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2EI\Omega_2}{9} + \frac{4EI\Omega_3}{9} + \frac{6EIV_2}{9^2} - \frac{4P}{3} = 0$$

D'après l'énoncé :

- $E = 10000000000 \text{ Pa}$
- $I = \frac{0,5 \times 1^3}{12} \text{ m}^4$
- $A = 0,5 \times 1 = 0,5 \text{ m}^2$

L'application numérique est :

$$\begin{pmatrix} 0 & 506913580 & 31111111 & 31111111 \\ 560595556 & 0 & 25200000 & 0 \\ 25200000 & 31111111 & 354666667 & 93333333 \\ 0 & 31111111 & 93333333 & 186666667 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25926 \\ 0 \\ -66667 \\ 133333 \end{pmatrix}$$

VI. Au final, la résolution du système est :

- $U_2 = 0,0000194 \text{ m}$
- $V_2 = -0,0000826 \text{ m}$
- $\Omega_2 = -0,000431 \text{ rad}$
- $\Omega_3 = 0,000942 \text{ rad}$

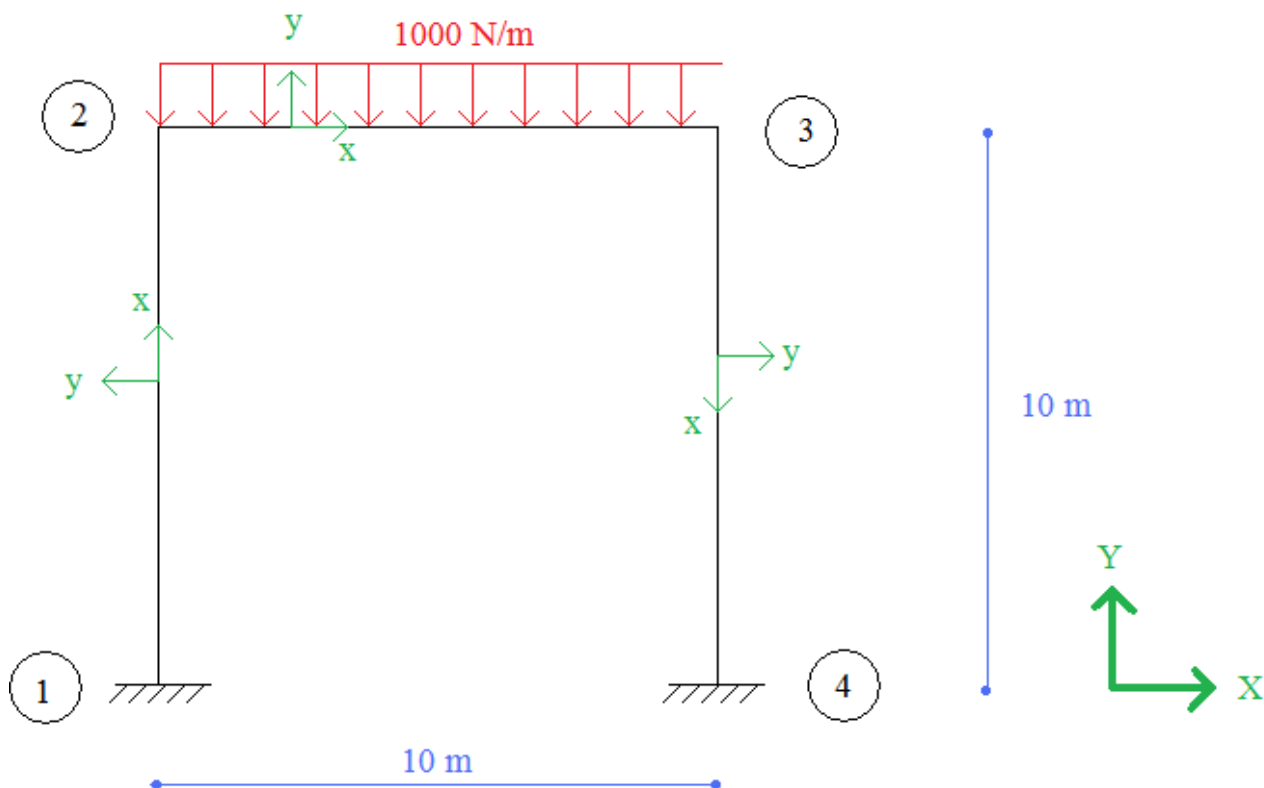
Remarque :

Ensuite pour obtenir les torseurs au niveau des nœuds, il suffit d'utiliser les relations entre les torseurs et les déplacements.

Puis, il est possible d'obtenir le torseur en tout point puisque les torseurs aux extrémités des poutres sont connus.

6.10 Exercices

Exercice 25



Caractéristiques géométrique de la section :

- Aire: $0,12 \text{ m}^2$
- Moment d'inertie : $0,0016 \text{ m}^4$

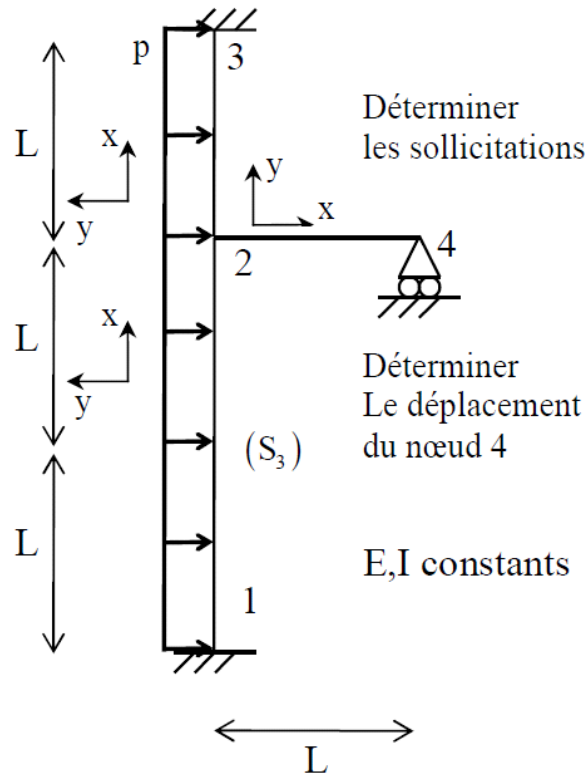
Module de Young : 30.10^9 Pa

Calculer les rotations et déplacements des nœuds 2 et 3.

6.11 Extraits d'annales

Exercice 26 : extrait des annales de novembre 2013

Partie III : Méthode des déplacements (7 pts)

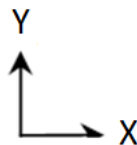


Données supplémentaires par rapport aux annales

On exprimera les sollicitations avec l'application numérique suivante :

- $L = 5 \text{ m}$
- $E = 30 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
- $p = 1000 \text{ N/m}$
- $A = 0,5 \text{ m}^2$
- $I = 0,0417 \text{ m}^4$

Le repère global est pris avec les directions suivantes :



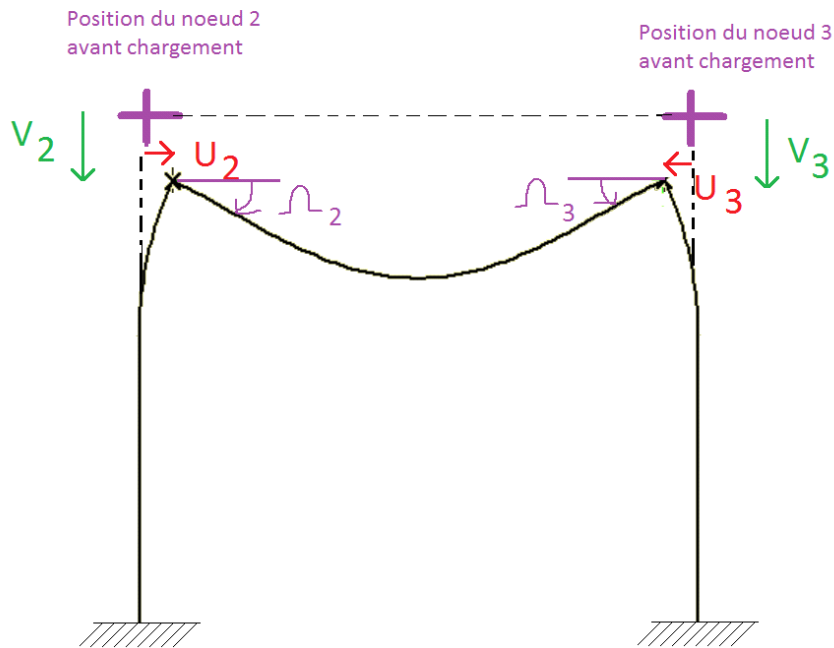
6.12 Solutions

6.12.1 Solution 25

Inconnues

Au niveau des encastrement les déplacements sont nuls : $\begin{cases} U_1 = V_1 = U_2 = V_2 = 0 \\ \Omega_1 = \Omega_2 = 0 \end{cases}$

Les inconnues sont donc les déplacements au niveau des nœuds 2 et 3 : $U_2, V_2, \Omega_2, U_3, V_3$ et Ω_3 .



Par symétrie du problème, il vient que :

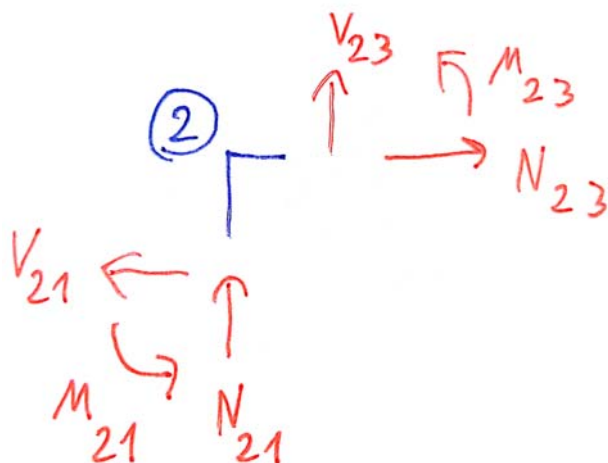
$$\begin{cases} U_2 = -U_3 \\ V_2 = V_3 \\ \Omega_2 = -\Omega_3 \end{cases}$$

Ainsi, seules 3 inconnues ne sont à déterminer.

Equivalence entre les notations du repère global et du repère local

	nœud [2]	nœud [3]
Repère global		
Repère local de la poutre [2] - [3]		
Repère local de la poutre [1] - [2]		Sans objet
Equivalence	$\begin{cases} U_2 = u_{23} = -v_{21} \\ V_2 = v_{23} = u_{21} \\ \Omega_2 = \omega_{23} = \omega_{21} \end{cases}$	$\begin{cases} U_3 = -U_2 = u_{32} \\ V_3 = V_2 = v_{32} \\ \Omega_3 = -\Omega_2 = \omega_{32} \end{cases}$

Equilibre du nœud [2]



La direction $\vec{X}$: $N_{23} - V_{21} = 0$

La direction $\vec{Y}$: $N_{21} + V_{23} = 0$

Le moment fléchissant autour de $\vec{Z}$:
 $M_{21} + M_{23} = 0$

$$\begin{aligned} M_{23} &= \frac{4EI\omega_{23}}{L_{23}} + \frac{2EI\omega_{32}}{L_{23}} - \frac{6EI}{L_{23}^2}(v_{32} - v_{23}) + M_{23}^0 \\ &= \frac{4EI\Omega_2}{L} + \frac{2EI\Omega_3}{L} - \frac{6EI}{L^2}(V_3 - V_2) + \frac{pL^2}{12} \\ &= \frac{2EI\Omega_2}{L} + \frac{pL^2}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{21} &= \frac{2EI\omega_{12}}{L} + \frac{4EI\omega_{21}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{21} - v_{12}) + M_{21}^0 \\ &= \frac{4EI\Omega_2}{L} + \frac{6EIU_2}{L^2} \end{aligned}$$

$$M_{21} + M_{23} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{6EI\Omega_2}{L} + \frac{6EIU_2}{L^2} + \frac{pL^2}{12} = 0}$$

$$\begin{aligned} V_{23} &= \frac{6EI}{L^2}(\omega_{23} + \omega_{32}) - \frac{12EI}{L^3}(v_{32} - v_{23}) + V_{23}^0 \\ &= \frac{6EI}{L^2}(\Omega_2 + \Omega_3) - \frac{12EI}{L^3}(V_3 - V_2) + \frac{pL}{2} \\ &= \frac{pL}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{21} &= \frac{EA}{L}(u_{21} - u_{12}) + N_{21}^0 \\ &= \frac{EAV_2}{L} \end{aligned}$$

$$N_{21} + V_{23} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{pL}{2} + \frac{EAV_2}{L} = 0}$$

$$\begin{aligned} N_{23} &= -\frac{EA}{L}(u_{32} - u_{23}) + N_{23}^0 \\ &= -\frac{EA}{L}(-U_2 - U_2) \\ &= \frac{2EAU_2}{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_{21} &= -\frac{6EI}{L^2}(\omega_{12} + \omega_{21}) + \frac{12EI}{L^3}(v_{21} - v_{12}) + V_{21}^0 \\ &= -\frac{6EI\Omega_2}{L^2} - \frac{12EIU_2}{L^3} \end{aligned}$$

$$N_{23} - V_{21} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{2EAU_2}{L} + \frac{6EI\Omega_2}{L^2} + \frac{12EIU_2}{L^3} = 0}$$

Résolution :

$$\begin{pmatrix} \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L} \\ 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ \frac{2EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{pL^2}{12} \\ -\frac{pL}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Application numérique :

$$\begin{pmatrix} 2880000 & 0 & 28800000 \\ 0 & 360000000 & 0 \\ 720576000 & 0 & 2880000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8333 \\ -5000 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où

$$\begin{cases} U_2 = 1,16 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ V_2 = -1,39 \cdot 10^{-5} \text{ m} \\ \Omega_2 = -2,89 \cdot 10^{-4} \text{ m} \end{cases}$$

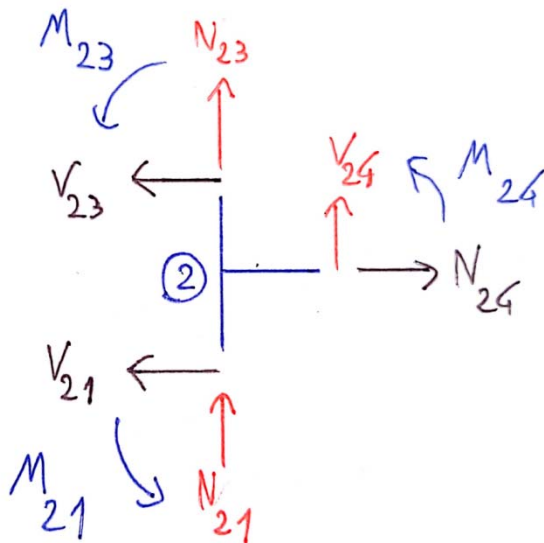
6.12.2 Solution 26

Inconnues

Au niveau des encastremets les déplacements sont nuls, ainsi que le déplacement vertical au niveau du nœud [4] : $\begin{cases} U_1 = V_1 = U_3 = V_3 = V_4 = 0 \\ \Omega_1 = \Omega_3 = 0 \end{cases}$

Les inconnues sont donc les déplacements au niveau des nœuds [2] et [4] : U_2, V_2, Ω_2, U_4 , et Ω_4 .

Equilibre du nœud [2]



La direction $\vec{X}$: $N_{24} - V_{23} - V_{21} = 0$

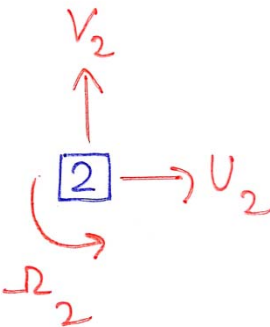
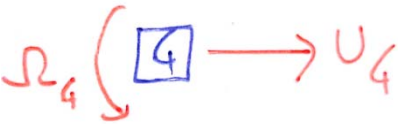
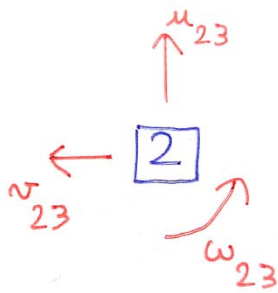
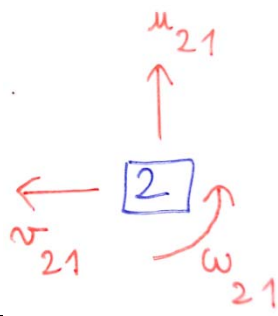
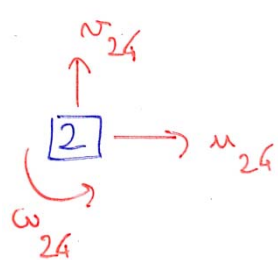
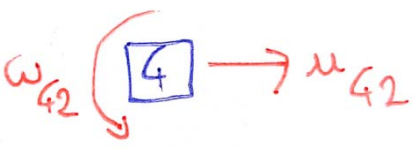
La direction $\vec{Y}$: $N_{23} + N_{21} + V_{24} = 0$

Le moment fléchissant autour de $\vec{Z}$: $M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0$

De plus, le nœud [4] est une appui simple donc :

$$\begin{cases} M_{42} = 0 \\ N_{42} = 0 \end{cases}$$

Equivalence entre les notations du repère global et du repère local

	nœud 2	nœud 4
Repère global		
Repère local de la poutre 2 - 3		Sans objet
Repère local de la poutre 1 - 2		Sans objet
Repère local de la poutre 2 - 4		
Equivalence	$\begin{cases} U_2 = u_{24} = -v_{21} = -v_{23} \\ V_2 = u_{23} = u_{21} = v_{24} \\ \Omega_2 = \omega_{23} = \omega_{21} = \omega_{24} \end{cases}$	$\begin{cases} U_4 = u_{42} \\ V_4 = v_{42} = 0 \\ \Omega_4 = \omega_{42} \end{cases}$

$$M_{24} = \frac{4EI\omega_{24}}{L} + \frac{2EI\omega_{42}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{42} - v_{24}) + M_{24}^0$$

$$= \frac{4EI\Omega_2}{L} + \frac{2EI\Omega_4}{L} + \frac{6EIV_2}{L^2}$$

$$M_{21} = \frac{2EI\omega_{12}}{(2L)} + \frac{4EI\omega_{21}}{(2L)} - \frac{6EI}{(2L)^2}(v_{21} - v_{12}) + M_{21}^0$$

$$= \frac{2EI\Omega_2}{L} + \frac{3EIU_2}{2L^2} - \frac{p(2L)^2}{12}$$

$$= \frac{2EI\Omega_2}{L} + \frac{3EIU_2}{2L^2} - \frac{pL^2}{3}$$

$$M_{23} = \frac{4EI\omega_{23}}{L} + \frac{2EI\omega_{32}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{32} - v_{23}) + M_{23}^0$$

$$= \frac{4EI\Omega_2}{L} - \frac{6EIU_2}{L^2} + \frac{pL^2}{12}$$

$$M_{21} + M_{23} + M_{24} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{10EI\Omega_2}{L} - \frac{9EIU_2}{2L^2} + \frac{2EI\Omega_4}{L} + \frac{6EIV_2}{L^2} - \frac{pL^2}{4} = 0}$$

$$V_{23} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_{23} + \omega_{32}) - \frac{12EI}{L^3}(v_{32} - v_{23}) + V_{23}^0$$

$$= \frac{6EI\Omega_2}{L^2} - \frac{12EIU_2}{L^3} + \frac{pL}{2}$$

$$V_{21} = -\frac{6EI}{(2L)^2}(\omega_{12} + \omega_{21}) + \frac{12EI}{(2L)^3}(v_{21} - v_{12}) + V_{21}^0$$

$$= -\frac{6EI\Omega_2}{(2L)^2} - \frac{12EIU_2}{(2L)^3} + \frac{p(2L)}{2}$$

$$= -\frac{3EI\Omega_2}{2L^2} - \frac{3EIU_2}{2L^3} + pL$$

$$N_{24} = -\frac{EA}{L}(u_{42} - u_{24}) + N_{24}^0$$

$$= \frac{EAU_2}{L} - \frac{EAU_4}{L}$$

$$N_{24} - V_{23} - V_{21} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{9EI\Omega_2}{2L^2} + \left(-\frac{27EI}{2L^3} + \frac{EA}{L}\right)U_2 - \frac{EAU_4}{L} + \frac{3pL}{2} = 0}$$

$$N_{23} = -\frac{EA}{L}(u_{32} - u_{23}) + N_{23}^0$$

$$= \frac{EAV_2}{L}$$

$$N_{21} = \frac{EA}{(2L)}(u_{21} - u_{12}) + N_{21}^0$$

$$= \frac{EAV_2}{2L}$$

$$V_{24} = \frac{6EI}{L^2}(\omega_{24} + \omega_{42}) - \frac{12EI}{L^3}(v_{42} - v_{24}) + V_{24}^0$$

$$= \frac{6EI\Omega_2}{L^2} + \frac{6EI\Omega_4}{L^2} + \frac{12EIV_2}{L^3}$$

$$N_{23} + N_{21} + V_{24} = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{6EI\Omega_2}{L^2} + \left(\frac{12EI}{L^3} + \frac{3EA}{2L} \right) V_2 + \frac{6EI\Omega_4}{L^2} = 0 \right]$$

$$N_{42} = 0 \Leftrightarrow \frac{EA}{L}(u_{42} - u_{24}) + N_{42}^0 = 0 \Leftrightarrow [U_4 - U_2 = 0]$$

$$M_{42} = 0 \Leftrightarrow \frac{2EI\omega_{24}}{L} + \frac{4EI\omega_{42}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{42} - v_{24}) + M_{42}^0 = 0 \Leftrightarrow \left[\frac{2EI\Omega_2}{L} + \frac{4EI\Omega_4}{L} + \frac{6EIV_2}{L^2} = 0 \right]$$

Au final,

$$\begin{pmatrix} -\frac{9EI}{2L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{10EI}{L} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{27EI}{2L^3} + \frac{EA}{L} & 0 & \frac{9EI}{2L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{3EA}{2L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \Omega_2 \\ U_4 \\ \Omega_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{pL^2}{4} \\ -\frac{3pL}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} U_2 = \frac{2pL^4}{15E(5AL^2 + 6I)} + \frac{13pL^4}{90EI} \approx \boxed{7,23.10^{-5} \text{ m}} \\ V_2 = \frac{-pL^4}{E(5AL^2 + 6I)} \approx \boxed{-3,32.10^{-7} \text{ m}} \\ \Omega_2 = \frac{2pL^3}{5E(5AL^2 + 6I)} + \frac{pL^3}{10EI} \approx \boxed{1,00.10^{-5} \text{ rad}} \\ U_4 = \frac{2pL^4}{15E(5AL^2 + 6I)} + \frac{13pL^4}{90EI} \approx \boxed{7,23.10^{-5} \text{ m}} \\ \Omega_4 = \frac{-pL^3(AL^2 - 4I)}{4EI(5AL^2 + 6I)} = \boxed{-4,91.10^{-6} \text{ rad}} \end{cases}$$

Poutre [1] - [2] :

$$M_{12} = \frac{4EI\omega_{12}}{(2L)} + \frac{2EI\omega_{21}}{(2L)} - \frac{6EI}{(2L)^2}(v_{21} - v_{12}) + M_{12}^0$$

$$= \frac{EI\Omega_2}{L} + \frac{3EIV_2}{2L^2} + \frac{pL^2}{3} \approx 16300 \text{ N.m}$$

$$M_{21} = \frac{2EI\Omega_2}{L} + \frac{3EIV_2}{2L^2} - \frac{pL^2}{3} \approx 2100 \text{ N.m}$$

$$M_{iso}(x) = \frac{px}{2}(2L - x) = 5000x - 500x^2$$

$$M_{12}(x) = M_{iso}(x) - M_{12} \cdot \frac{L-x}{L} + M_{21} \cdot \frac{x}{L} = 5000x - 500x^2 - 16300 \cdot \frac{10-x}{10} + 2100 \cdot \frac{x}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{12}(x) = -500x^2 + 6840x - 16300}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{12}(x) = 1000x - 6840}$$

$$N_{12}(x) = N_{21} = \frac{EAV_2}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{12}(x) = -500}$$

Poutre [2] - [4] :

$$M_{24} = \frac{4EI\Omega_2}{L} + \frac{2EI\Omega_4}{L} + \frac{6EIV_2}{L^2} \approx 7500 \text{ N.m}$$

$$M_{iso}(x) = 0$$

$$M_{24}(x) = M_{iso}(x) - M_{24} \cdot \frac{L-x}{L} + M_{42} \cdot \frac{x}{L} = -7500 \cdot \frac{5-x}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{24}(x) = 1500x - 7500}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{24}(x) = -1500}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{24}(x) = 0}$$

Poutre [2] - [3] :

$$M_{32} = \frac{2EI\omega_{23}}{L} + \frac{4EI\omega_{32}}{L} - \frac{6EI}{L^2}(v_{32} - v_{23}) + M_{32}^0$$

$$= \frac{2EI\Omega_2}{L} - \frac{6EIU_2}{L^2} - \frac{pL^2}{12} \approx -18800 \text{ N.m}$$

$$M_{23} = \frac{4EI\Omega_2}{L} - \frac{6EIU_2}{L^2} + \frac{pL^2}{12} \approx -9600 \text{ N.m}$$

Posons $X = x - 10$

$$M_{iso}(X) = \frac{pX}{2}(L-X) = 2500X - 500X^2$$

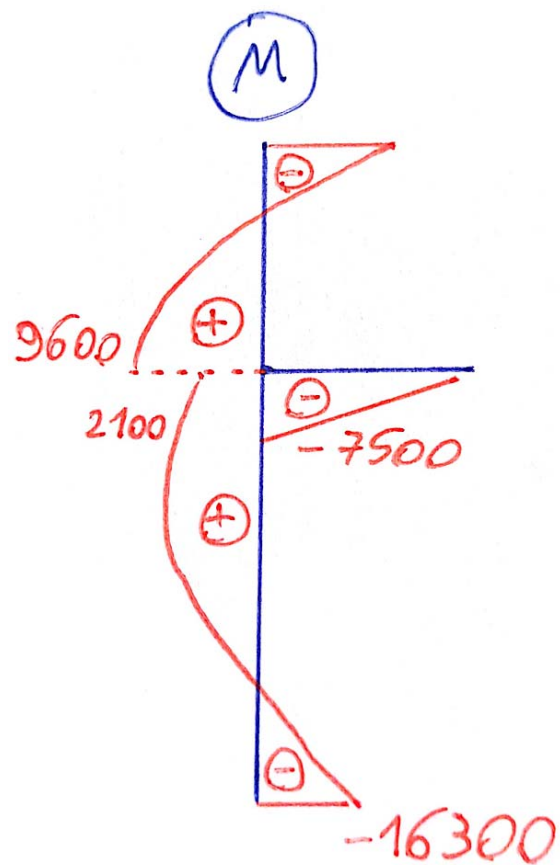
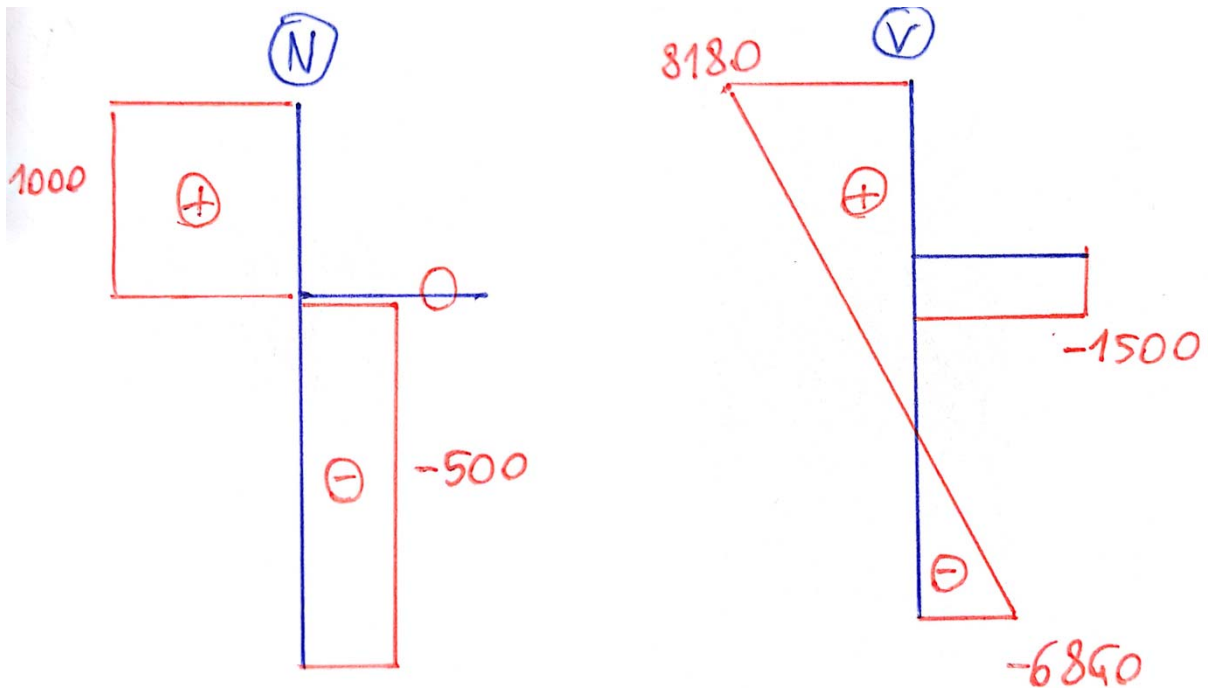
$$M_{23}(X) = M_{iso}(X) - M_{23} \cdot \frac{L-x}{L} + M_{32} \cdot \frac{x}{L} = 2500X - 500X^2 + 9600 \cdot \frac{5-X}{5} - 18800 \cdot \frac{X}{10}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_{23}(X) = -500X^2 - 3180X + 9600}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{23}(X) = 1000X - 3180}$$

$$N_{23}(X) + N_{23} = 0 \Rightarrow N_{23}(X) = -\frac{EAV_2}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_{12}(x) = 1000}$$



7. Méthode des rotations

7.1 Domaine d'application

Les déformations d'effort normal sont négligées.

7.2 Conséquence

Pour chaque poutre entre les nœuds $\boxed{r}$ et $\boxed{s}$ composant la structure, dans le repère local, les déplacements entre nœuds dans le sens longitudinal sont égaux :

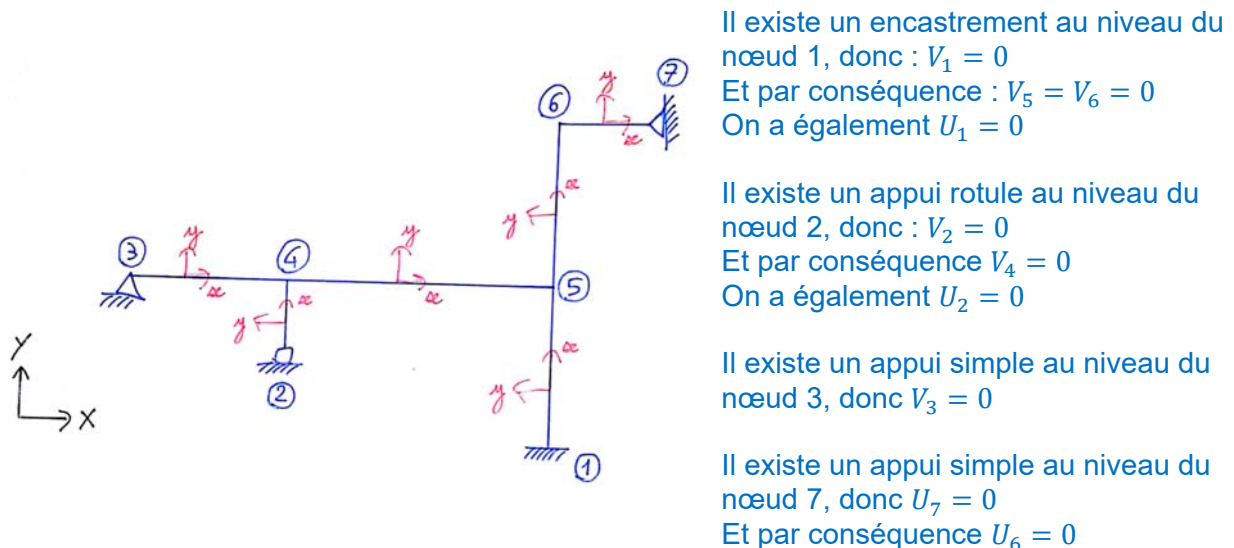
$$u_{rs} = u_{sr}$$

Lorsque les déplacements sont empêchés par un appui encastrement, par une rotule ou un appui simple perpendiculaire au vecteur $\vec{x}$ du repère local, tous les nœuds d'une même poutre dans la direction $\vec{x}$ du repère local ont donc un déplacement longitudinal nul.

De plus, dans la méthode des rotations, le champ de déplacement est dessiné en remplaçant chaque encastrement (interne ou externe) par une rotule.

Illustration

Soit la structure suivante :

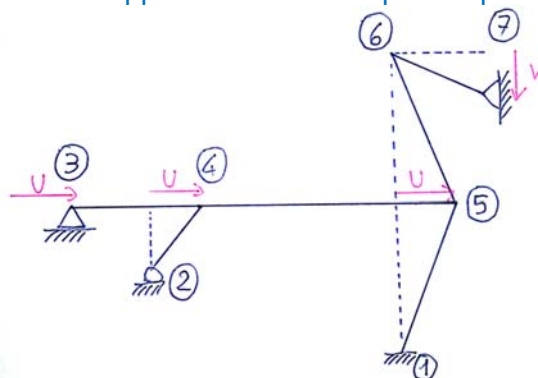


Les déplacements possibles en translation sont donc : U_3 , U_4 , U_5 et V_7 .

Puisque les nœuds 3, 4 et 5 constituent une même poutre, on peut poser

$$U_3 = U_4 = U_5 = U \text{ et } V_7 = V$$

Au final, la méthode des rotations s'appuiera sur le champ de déplacement suivant :

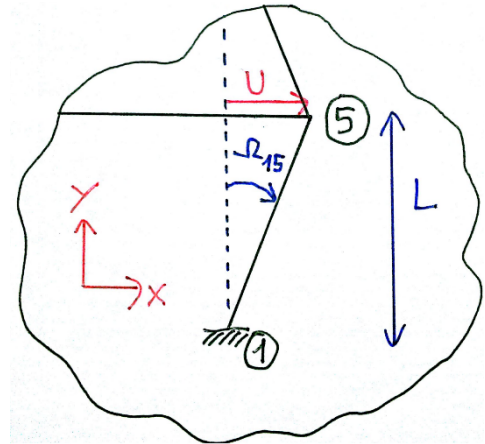


7.3 Notion de rotation d'ensemble des poutres

Dans l'illustration précédente, certaines poutres ont une rotation d'ensemble.

Par exemple, le déplacement U du nœud 5 engendre une rotation notée Ω_{15} de la poutre 1-5.

La rotation de la poutre est négative par rapport au repère global (et local).



En posant L la longueur de la poutre, on obtient :

$$\Omega_{15} = -\frac{U}{L}$$

Généralisation de la rotation d'ensemble

Avec

- v_{ij} et v_{ji} : déplacements dans le repère local dans la direction et le sens $\vec{y}$ des nœuds i et j ,
- Ω_{ij} : rotation d'ensemble de la poutre

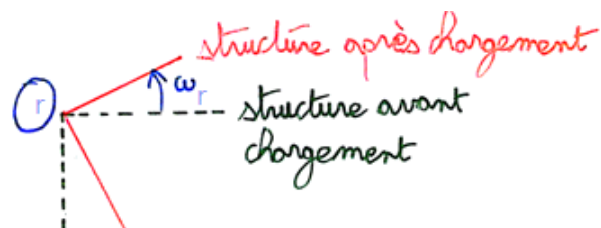
$$\Omega_{ij} = \Omega_{ji} = \frac{v_{ji} - v_{ij}}{L}$$

Remarque : le signe de cette relation est conforme au sens positif de rotation du repère local.

7.4 Notion de rotation des nœuds

Le chargement peut engendrer des rotations au niveau des nœuds comme l'illustre la figure suivante pour le nœud r :

Contrairement au champ de déplacement de l'illustration précédente qui est un champ virtuel, la rotation ω_r est bien celle observée réellement au nœud r suite au chargement de la structure.



7.5 Relations entre moments, rotation d'ensemble et rotation des nœuds

- ω_r : rotation du nœud r
- ω_s : rotation du nœud s
- Ω_{rs} : rotation d'ensemble de la poutre rs
- M''_{rs} : moment d'encastrement d'une poutre console au niveau du nœud r
- M'_{rs} : moment d'encastrement d'une poutre encastrement-appui simple au niveau du nœud r
- M^0_{rs} : moment d'encastrement d'une poutre bi-encastree au niveau du nœud r

En considérant la poutre rs , la relation dépend de la nature des nœuds r et s :

		Nature du nœud r	
		r est un nœud interne	r n'est pas un nœud interne
Nature du nœud s	Extrémité libre	$M_{rs} = \frac{3EI}{L} \omega_r - \frac{3EI}{L} \Omega_{rs} + M''_{rs}$	$M_{rs} = -\frac{3EI}{L} \Omega_{rs} + M''_{rs}$
	Appui simple ou rotule	$M_{rs} = \frac{3EI}{L} \omega_r - \frac{3EI}{L} \Omega_{rs} + M'_{rs}$	$M_{rs} = -\frac{3EI}{L} \Omega_{rs} + M'_{rs}$
	Nœud interne	$M_{rs} = \frac{4EI}{L} \omega_r + \frac{2EI}{L} \omega_s - \frac{6EI}{L} \Omega_{rs} + M^0_{rs}$	$M_{rs} = \frac{2EI}{L} \omega_s - \frac{6EI}{L} \Omega_{rs} + M^0_{rs}$
	Encastrement	$M_{rs} = \frac{4EI}{L} \omega_r - \frac{6EI}{L} \Omega_{rs} + M^0_{rs}$	$M_{rs} = -\frac{6EI}{L} \Omega_{rs} + M^0_{rs}$

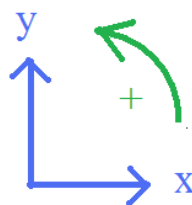
Nota :

- Le repère local n'est pas nécessairement dirigé de r vers s
- Les signes de ω_r , ω_s , Ω_{rs} et M_{rs} sont conformes au sens positif de rotation du repère local de la poutre rs

Attention si le signe positif de rotation du repère local change d'une poutre à l'autre.

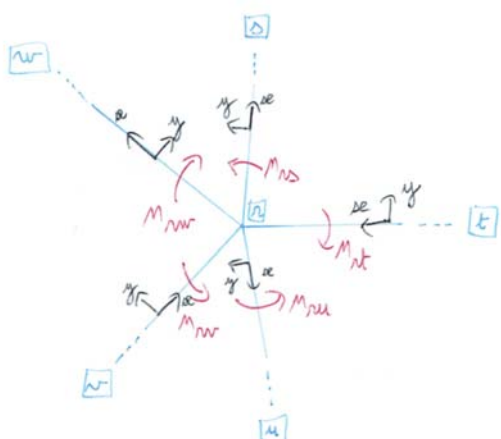
7.6 Equilibre des moments au niveau des nœuds internes

Pour chaque nœud interne i , les moments M_{rs} sont représentés autour de ce nœud en respectant le sens positif du repère local (flèche courbe dirigée de x à y)



Puis, l'équilibre en moment consiste à écrire que la somme (algébrique) des moments autour de ce nœud est nulle.

Illustration (avec un nœud lié à 5 poutres)



Dans l'exemple ci-contre, l'équilibre en moment du nœud i est traduit par :

$$M_{rs} - M_{rt} + M_{ru} + M_{rv} - M_{rw} = 0$$

$M_{rs}, \dots, M_{rw}$ sont ensuite déterminés par les relations vues précédemment par rapport à la rotation d'ensemble des poutres et la rotations des nœuds.

7.7 Utilisation du principe des travaux virtuels (PTV)

7.7.1 Travail des forces

$$\text{Travail}(\text{Force}) = \text{Force} \times \text{déplacement}$$

Illustration force ponctuelle

Dans l'exemple ci-contre :

$$\text{Travail}(\text{Force}) = F \times u$$

Avec l'hypothèse des petites transformations :

$$u = L \times \tan \Omega \approx L \times \Omega$$

Donc

$$\text{Travail}(\text{Force}) = F \times L \times \Omega$$

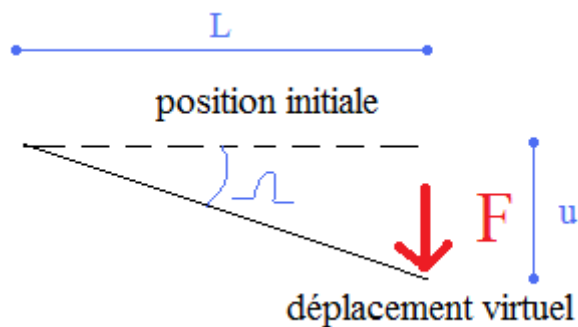


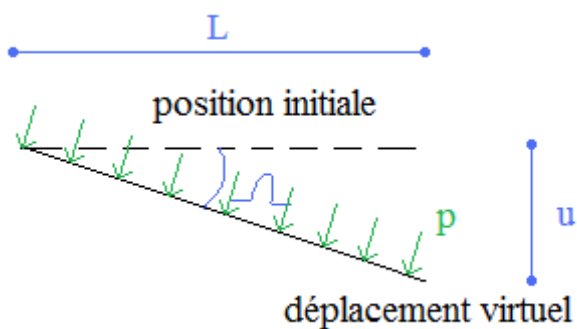
Illustration force répartie rectangulaire

$$\text{Travail}(\text{Force}) = \int_0^L p \cdot u(x) \cdot dx$$

$$u(x) = x \times \tan \Omega \approx x \times \Omega$$

Donc

$$\text{Travail}(\text{Force}) = \frac{p \times L^2 \times \Omega}{2}$$



7.7.2 Travail des moments

Au niveau des nœuds internes et des encastres, on trace les moments M_{rs} aux nœuds dans le sens positif par rapport au repère local.

On dessine la rotation d'ensemble Ω_{rs} de la poutre $r-s$.

Puis le travail du moment M_{rs} est égal à :

$$M_{rs} \times \Omega_{rs}$$

Le travail est :

- positif si M_{rs} et Ω_{rs} sont dans le même sens
- négatif sinon

Illustration

Position initiale	Position déplacée et moment aux noeuds	Travail(Moment)
		$M_{rs} \times \Omega_{rs} = -M_{rs} \times \Omega $
		$M_{rs} \times \Omega_{rs} = M_{rs} \times \Omega $

Remarque :

Le travail des moments externes se calculent de la même manière.

7.7.3 PTV

L'équilibre des travaux des forces et des moments se traduit par :

$$\boxed{\text{Travaux}(\text{forces}) = \text{Travaux}(\text{moments})}$$

7.8 Méthode

- I. Numéroté chaque nœud de la structure
- II. Dessiner un déplacement virtuel en négligeant l'effort normal et en considérant les encastresments comme des rotules
- III. Pour chaque nœud intérieur de la structure (les nœuds en extrémité libres et au niveau des réactions d'appuis sont exclus), écrire l'équilibre en moment (les directions des moments doivent être conformes au repère local de chaque poutre)
- IV. Remplacer chaque moment M_{is} par la relation en fonction des rotations
- V. Utiliser le PTV (le travail des forces est égal au travail des moments)
- VI. Résoudre le système obtenu
- VII. Calculer les torseurs au niveau des nœuds
- VIII. Obtenir les torseurs en tout point par utilisation de relations entre moment et effort tranchant entre deux sections d'une poutre droite dont les moments sont connus.

En notant i et j les nœuds de la poutre tels que le vecteur $\vec{x}$ du repère local soit dirigé de i vers j

Adaptation de la relation du chapitre 2 avec :
$$\begin{cases} M_A = -M_{ij} \\ M_B = M_{ji} \end{cases}$$

Ainsi, pour chaque poutre $i - j$

Le moment à l'abscisse x est égal à :

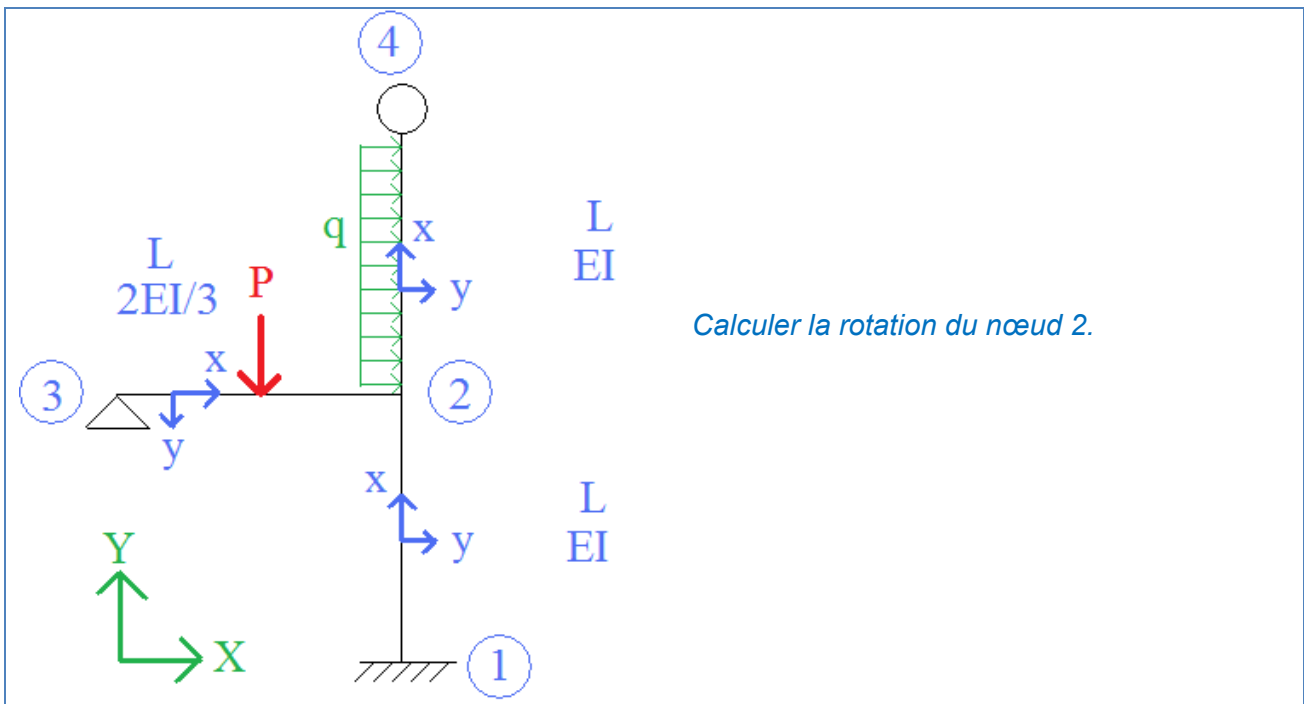
$$M_{ij}(x) = M_{iso}(x) - M_{ij} \cdot \frac{L-x}{L} + M_{ji} \cdot \frac{x}{L}$$

L'effort tranchant à l'abscisse x est égal à :

$$V_{ij}(x) = V_{iso}(x) + \frac{M_{ij} + M_{ji}}{L}$$

ATTENTION : ces relations ne doivent pas être utilisées pour une portion de poutre en console.

7.9 Exemple



Solution

L'encastrement en 1 et la rotule en 4 impliquent que $V_1 = 0$ et $V_4 = 0$

Ainsi, $V_2 = 0$

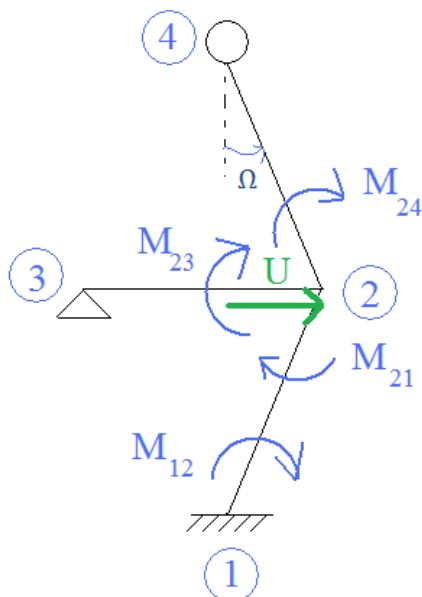
Il y a un appui simple en 3 donc : $V_3 = 0$

Les seuls déplacements possibles sont donc : U_3 et U_2 . Puisque les nœuds 2 et 3 font partie de la même poutre, il vient que :

$$U_3 = U_2 = U$$

Ainsi, en notant Ω la rotation de la poutre 4-2

$$\Omega = \frac{U}{L}$$



Remarques :

- les vecteurs courbes représentant les moments sont orientés positivement selon le repère **local**.
- Il n'existe pas de moments M_{42} ou M_{32} puisque le nœud 4 est une rotule et le nœud 3 est un appui simple (3 et 4 sont donc des extrémités non encastrees).

Equilibre du nœud 2 :

L'équilibre en moment au niveau du nœud 2 est :

$$M_{23} + M_{24} + M_{21} = 0$$

- 3 est un nœud simplement appuyé donc :

$$M_{23} = \frac{3 \times \frac{2}{3} \times EI}{L} \omega_2 - \frac{3 \times \frac{2}{3} \times EI}{L} \Omega_{23} + M'_{23} = \frac{2EI}{L} \omega_2 + \frac{qL^2}{8}$$

- 4 est une liaison rotule donc :

$$M_{24} = \frac{3EI}{L} \omega_2 - \frac{3EI}{L} \Omega_{23} + M'_{23} = \frac{3EI}{L} \omega_2 + \frac{3EI}{L} \Omega - \frac{qL^2}{8}$$

- 1 est un encastrement donc :

$$M_{21} = \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega_{21} + M_{21}^0 = \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega$$

Ainsi, on obtient une première équation :

$$\frac{9EI}{L} \omega_2 - \frac{3EI}{L} \Omega = 0$$

Principe des travaux virtuels

- Travail des forces

$$P \times 0 + qL \times \frac{U}{2} = \frac{qL^2 \Omega}{2}$$

- Travail des moments

$$M_{23} \times 0 + M_{24} \times (-\Omega) + M_{21} \times \Omega + M_{12} \times \Omega$$

Le travail des forces doit compenser le travail des moments, ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{qL^2 \Omega}{2} &= -M_{24} \times \Omega + M_{21} \times \Omega + M_{12} \times \Omega \\ \Rightarrow \frac{qL^2}{2} &= -M_{24} + M_{21} + M_{12} \end{aligned}$$

M_{24} et M_{21} ont déjà été préalablement calculés, puisque le nœud 2 est un nœud interne et que 1 n'est pas un nœud interne ($\omega_1 = 0$) :

$$M_{12} = \frac{2EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega_{12} + M_{12}^0 = \frac{2EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega$$

Il vient alors que :

$$\begin{aligned} \frac{qL^2}{2} &= -M_{24} + M_{21} + M_{12} \\ \Rightarrow \frac{qL^2}{2} &= -\frac{3EI}{L} \omega_2 - \frac{3EI}{L} \Omega + \frac{qL^2}{8} + \frac{4EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega + \frac{2EI}{L} \omega_2 - \frac{6EI}{L} \Omega \\ \Rightarrow \frac{3EI}{L} \omega_2 - \frac{15EI}{L} \Omega &= -\frac{5qL^2}{8} \end{aligned}$$

Résolution

L'équilibre du nœud 2, ainsi que le PTV est traduit par :

$$\frac{EI}{L} \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 3 & -15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5qL^2/8 \end{pmatrix}$$

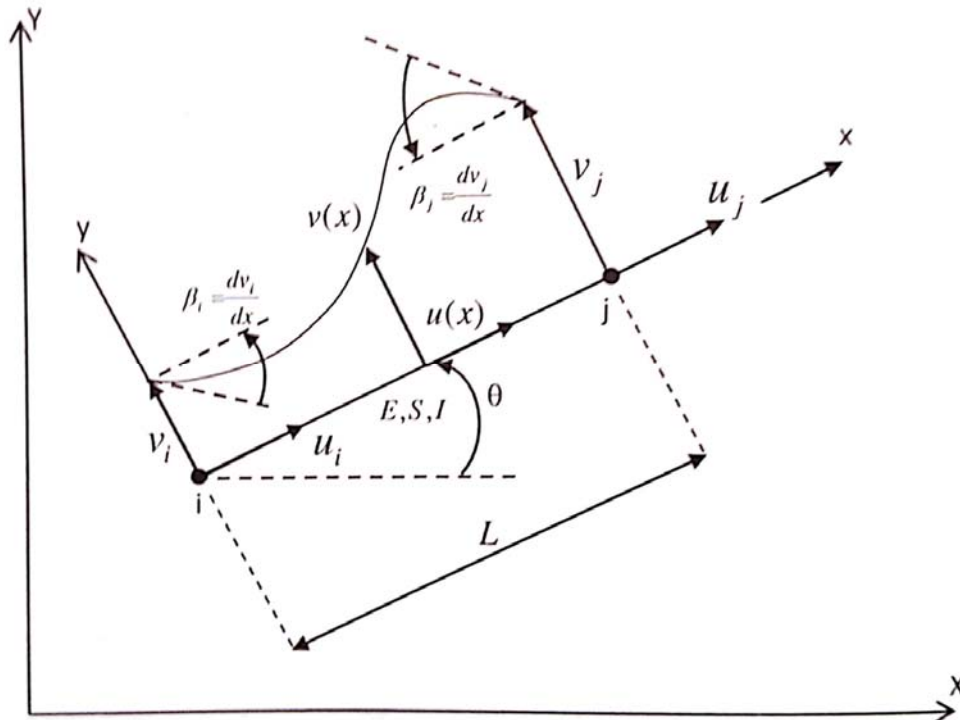
$$\Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = \frac{5qL^3}{336EI} \\ \Omega = \frac{5qL^3}{112EI} \end{cases}$$

8. Introduction aux éléments finis pour les poutres à 3 degrés de liberté

8.1 Domaine d'application

- E, I et A sont constants entre chaque nœud
- Matériau dans le domaine élastique linéaire
- La torsion n'est pas prise en compte

8.2 Déplacements et rotations des nœuds



8.2.1 Déplacement à l'effort normal (déplacement u)

Dans le cas d'une section constante, la déformation longitudinale due à l'effort normal est constante entre deux nœuds $[i]$ et $[j]$.

Or la déformation par rapport au déplacement est égale à : $\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = a$

Ainsi, l'intégration implique que $u(x) = ax + b$

Avec $\begin{cases} u(0) = u_i \\ u(L) = u_j \end{cases}$

donc $u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot u_i + \frac{x}{L} \cdot u_j$

8.2.2 Déplacement à la flexion (déplacement v)

La courbe $v(x)$ peut être approchée par un polynôme.

Or les conditions aux limites sont les déplacements selon $\vec{y}$ des nœuds v_i et v_j ainsi que les rotations au niveau des nœuds β_i et β_j .

Les 4 conditions aux limites impliquent un polynôme de degré 3 :

$$v(x) = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D$$

Avec
$$\begin{cases} v(0) = v_i \\ v(L) = v_j \\ \frac{dv(0)}{dx} = \beta_i \\ \frac{dv(L)}{dx} = \beta_j \end{cases}$$

Ainsi,

$$v(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \cdot v_i + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot \beta_i + \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \cdot v_j + \left(-\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \cdot \beta_j$$

8.3 Champ de déplacement sous forme matricielle

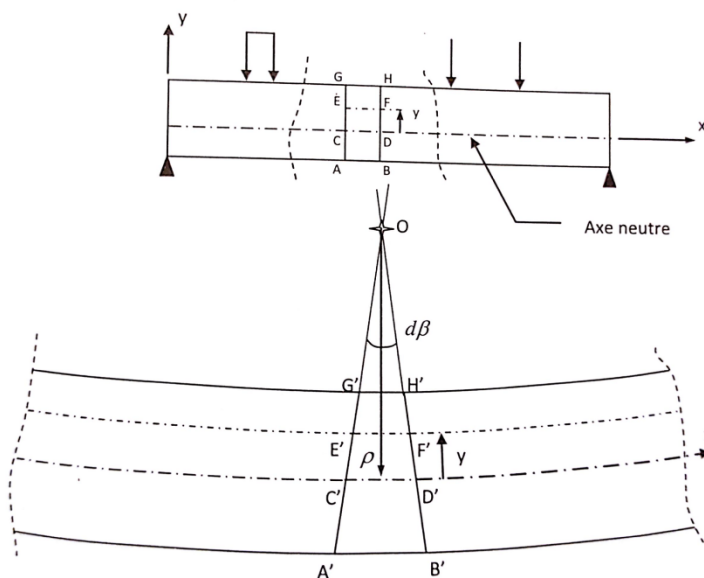
$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$$

8.4 Déformation longitudinale d'une poutre

8.4.1 Par effort normal

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx}$$

8.4.2 Par flexion



A l'ordonnée y :

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{E'F' - EF}{EF} = \frac{(\rho - y) \cdot d\beta - \rho \cdot d\beta}{\rho \cdot d\beta} \\ &= -\frac{y}{\rho} \end{aligned}$$

Par définition des contraintes normales :

$$\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = -\frac{E \cdot y}{\rho}$$

La relation entre moment fléchissant et contrainte est :

$$M = \int_S \sigma_x \cdot y \cdot dS = \int_S -\frac{E \cdot y^2}{\rho} \cdot dS$$

Or la définition du moment d'inertie est

$$I = \int_S y^2 \cdot dS$$

Donc

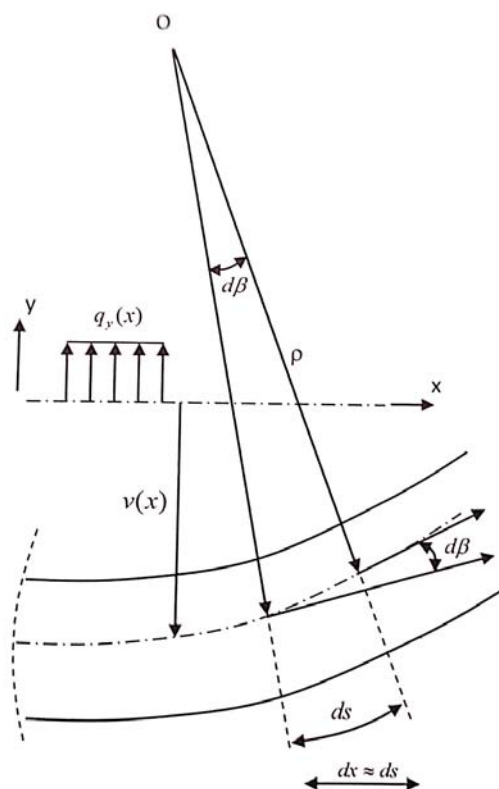
$$M = -\frac{E \cdot I}{\rho}$$

Ou encore :

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{M}{EI}$$

Et

$$\varepsilon_x = \frac{My}{EI}$$



D'après la figure ci-contre :

$$dx \approx ds = \rho \cdot d\beta$$

Ainsi

$$\frac{d\beta}{dx} \approx \frac{1}{\rho}$$

Puisque

$$\beta \approx \frac{dv}{dx}$$

Alors

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{d^2v}{dx^2}$$

Et donc :

$$\frac{1}{\rho} \approx -\frac{M}{EI} \approx \frac{d^2v}{dx^2}$$

Alors

$$\varepsilon_x = \frac{My}{EI} \approx -y \frac{d^2v}{dx^2}$$

8.4.3 Sous forme matricielle

En cumulant les déformations longitudinales de flexion et d'effort normal :

$$\varepsilon_x \approx \frac{du}{dx} - y \frac{d^2v}{dx^2}$$

Puisque

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & 0 & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$$

Alors

$$\varepsilon_x = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \quad \frac{1}{L} \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \right\} \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$$

Posons :

$$[M] = \left\{ -\frac{1}{L} \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \quad \frac{1}{L} \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2} \right) \cdot y \right\}$$

et

$$[u] = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\varepsilon_x = [M] \cdot [u]$$

Pour obtenir les contraintes normales : $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot [M] \cdot [u]$

8.5 Energie de déformation élémentaire

L'énergie de déformation élémentaire est :

$$\begin{aligned} W_E &= \frac{1}{2} \int_V \varepsilon_x \cdot \sigma_x \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V [\varepsilon_x]^t \cdot [\sigma_x] \cdot dV = \frac{1}{2} \int_V [[M] \cdot [u]]^t \cdot E \cdot [M] \cdot [u] \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} \int_V [u]^t \cdot [M]^t \cdot E \cdot [M] \cdot [u] \cdot dV \end{aligned}$$

En posant

$$[K] = \int_V [M]^t \cdot E \cdot [M] \cdot dV = E \cdot \int_V [M]^t \cdot [M] \cdot dV$$

Il vient que :

$$W_E = \frac{1}{2} [u]^t \cdot [K] \cdot [u]$$

La matrice $[K]$ est appelé matrice de rigidité et ne dépend pas du chargement mais uniquement de la géométrie (section, longueur) et du module de Young du matériau.

8.6 Matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre 2D

8.6.1 Repère local

$$[K] = E \cdot \iiint_V \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \\ \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \\ \frac{1}{L} \\ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \\ \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \end{Bmatrix} \cdot \left\{ -\frac{1}{L} \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \quad \frac{1}{L} \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \right\}$$

En posant :

$$[A] = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \\ \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \\ \frac{1}{L} \\ \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \\ \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \end{Bmatrix} \cdot \left\{ -\frac{1}{L} \quad \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \quad \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \quad \frac{1}{L} \quad \left(-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3}\right) \cdot y \quad \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \cdot y \right\}$$

$[A]$ est une matrice carrée d'ordre 6 :

$$[A] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix}$$

$[K]$ est alors également une matrice carrée d'ordre 6 :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Calculons quelques valeurs en tenant compte des définitions suivantes :

- Section : $A = \int_S dS$
- Moment statique au niveau du centre de gravité : $\int_S y dS = 0$
- Moment d'inertie : $I = \int_S y^2 dS$

$$k_{11} = E \cdot \iiint_V a_{11} \cdot dV = E \cdot \left(-\frac{1}{L}\right)^2 \int_0^L dx \cdot \int_S dS = \frac{EA}{L}$$

$$k_{22} = E \cdot \iiint_V a_{22} \cdot dV = E \cdot \int_0^L \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right)^2 dx \cdot \int_S y^2 dS = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{12} = E \cdot \iiint_V a_{12} \cdot dV = E \cdot \int_0^L \left(-\frac{1}{L}\right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) dx \cdot \int_S y dS = 0$$

$$k_{33} = E \cdot \iiint_V a_{22} \cdot dV = E \cdot \int_0^L \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right)^2 dx \cdot \int_S y^2 dS = \frac{4EI}{L}$$

$$k_{32} = E \cdot \iiint_V a_{12} \cdot dV = E \cdot \int_0^L \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \left(\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3}\right) dx \cdot \int_S y^2 dS = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{36} = E \cdot \iiint_V a_{12} \cdot dV = E \cdot \int_0^L \left(\frac{4}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) \left(\frac{2}{L} - \frac{6x}{L^2}\right) dx \cdot \int_S y^2 dS = \frac{2EI}{L}$$

Les 30 autres termes se calculent de manière similaire, ainsi la matrice de rigidité exprimée en repère local est :

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Rigidité du nœud i

Rigidité du nœud j

Facteur de transmission du nœud i vers j

Facteur de transmission du nœud j vers i

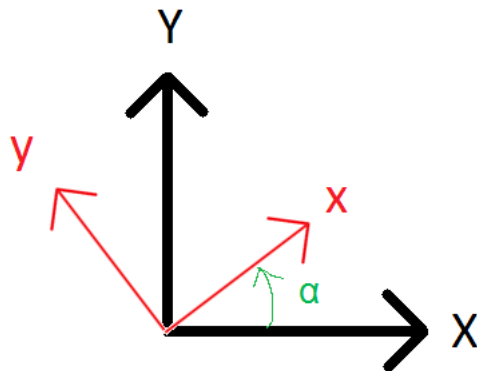
8.6.2 Repère global

L'axe $\vec{z}$ reste confondu avec l'axe $\vec{Z}$.

Le repère local est obtenu par rotation d'un angle α du repère global.

La matrice de rigidité dans le repère global s'écrit :

$$[K_{global}] = [R]^t \cdot [K] \cdot [R]$$



Avec la matrice de rotation

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matrice dans le repère global $[K_{global}]$ est alors égal à :

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & -\frac{EA}{L} \cos^2 \alpha - \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha & \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\ \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha & \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{L} \sin^2 \alpha - \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha & \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} \cos^2 \alpha - \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha & \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & \frac{EA}{L} \cos^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \sin^2 \alpha & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha \\ \left(-\frac{EA}{L} + \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & -\frac{EA}{L} \sin^2 \alpha - \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \left(\frac{EA}{L} - \frac{12EI}{L^3} \right) \cos \alpha \sin \alpha & \frac{EA}{L} \sin^2 \alpha + \frac{12EI}{L^3} \cos^2 \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha \\ -\frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & \frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} \sin \alpha & -\frac{6EI}{L^2} \cos \alpha & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

8.7 Travail des forces

Les forces peuvent être des forces surfaciques, volumiques ou d'actions des autres éléments sur la poutre concernée.

Posons $[F] = \begin{pmatrix} N_{i,ext} \\ V_{i,ext} \\ M_{i,ext} \\ N_{j,ext} \\ V_{j,ext} \\ M_{j,ext} \end{pmatrix}$

Le travail vaut $T_E = (u_i \quad v_i \quad \beta_i \quad u_j \quad v_j \quad \beta_j) \cdot \begin{pmatrix} N_{i,ext} \\ V_{i,ext} \\ M_{i,ext} \\ N_{j,ext} \\ V_{j,ext} \\ M_{j,ext} \end{pmatrix} = [u]^t \cdot [F]$

8.8 Energie potentielle

L'énergie potentielle est la différence entre l'énergie de déformation élémentaire et le travail des forces : $E = W_E - T_E$

Ainsi,

$$E = \frac{1}{2} [u]^t \cdot [K] \cdot [u] - [u]^t \cdot [F]$$

L'équilibre du système suppose une variation d'énergie potentielle nulle par rapport au déplacement donc :

$$\frac{dE}{du} = [du]^t \cdot \{[K] \cdot [u] - [F]\} = 0$$

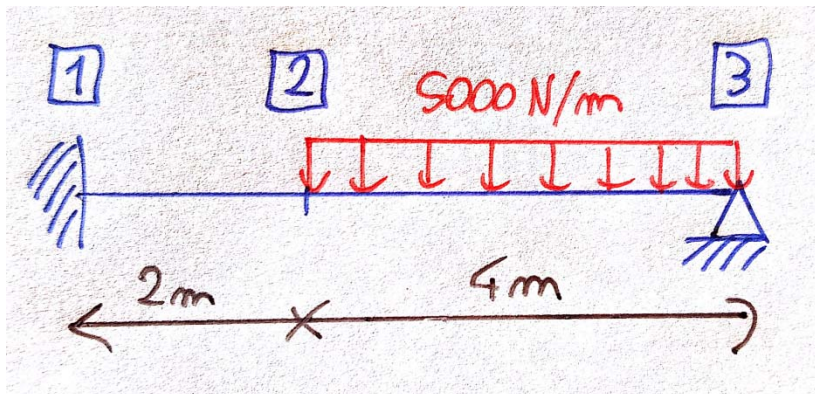
Puisque

$$\frac{d}{du} \left(\frac{1}{2} [u]^t \cdot [u] \right) = [du]^t \cdot [u]$$

Au final :

$$[K] \cdot [u] = [F]$$

9. Exemple



- $E = 210000 \text{ MPa}$
- Section rectangulaire de
 - o Hauteur = 1 m
 - o Largeur = 0,5 m

9.1 Connexion entre poutres

La matrice de rigidité de l'élément de poutre entre les points 1 et 2 (avec un facteur $1/E$) nommé $[K_{12}]$ est de la forme :

$$[K_{12}] = \begin{bmatrix} K_{12}^{sup,gauche} & K_{12}^{sup,droite} \\ K_{12}^{inf,gauche} & K_{12}^{inf,droite} \end{bmatrix}$$

Avec :

$K_{12}^{sup,gauche}$: matrice d'ordre 2 représentant la rigidité du nœud [1]

$K_{12}^{inf,droite}$: matrice d'ordre 2 représentant la rigidité du nœud [2]

$K_{12}^{sup,droite}$: matrice d'ordre 2 représentant le facteur de transmission du nœud [1] vers [2]

$K_{12}^{inf,gauche}$: matrice d'ordre 2 représentant le facteur de transmission du nœud [2] vers [1]

L'application numérique donne :

0,2500	0,0000	0,0000	-0,2500	0,0000	0,0000
0,0000	0,0625	0,0625	0,0000	-0,0625	0,0625
0,0000	0,0625	0,0833	0,0000	-0,0625	0,0417
-0,2500	0,0000	0,0000	0,2500	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0625	-0,0625	0,0000	0,0625	-0,0625
0,0000	0,0625	0,0417	0,0000	-0,0625	0,0833

La matrice de rigidité de l'élément de poutre entre les points 2 et 3 (avec un facteur 1/E) nommé $[K_{23}]$ est de la forme :

$$[K_{23}] = \begin{bmatrix} K_{23}^{sup,gauche} & K_{23}^{sup,droite} \\ K_{23}^{inf,gauche} & K_{23}^{inf,droite} \end{bmatrix}$$

Avec :

$K_{23}^{sup,gauche}$: matrice d'ordre 2 représentant la rigidité du nœud [2]

$K_{23}^{inf,droite}$: matrice d'ordre 2 représentant la rigidité du nœud [3]

$K_{23}^{sup,droite}$: matrice d'ordre 2 représentant le facteur de transmission du nœud [2] vers [3]

$K_{23}^{inf,gauche}$: matrice d'ordre 2 représentant le facteur de transmission du nœud [3] vers [2]

L'application numérique donne :

0,1250	0,0000	0,0000	-0,1250	0,0000	0,0000
0,0000	0,0078	0,0156	0,0000	-0,0078	0,0156
0,0000	0,0156	0,0417	0,0000	-0,0156	0,0208
-0,1250	0,0000	0,0000	0,1250	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0078	-0,0156	0,0000	0,0078	-0,0156
0,0000	0,0156	0,0208	0,0000	-0,0156	0,0417

L'assemblage de la matrice est : $[K] = \begin{bmatrix} K_{12}^{sup,gauche} & K_{12}^{sup,droite} & 0 \\ K_{12}^{inf,gauche} & K_{12}^{inf,droite} + K_{23}^{sup,gauche} & K_{23}^{sup,droite} \\ 0 & K_{23}^{inf,gauche} & K_{23}^{inf,droite} \end{bmatrix}$

L'assemblage de la matrice est alors :

0,2500	0,0000	0,0000	-0,2500	0,0000	0,0000	0	0	0
0,0000	0,0625	0,0625	0,0000	-0,0625	0,0625	0	0	0
0,0000	0,0625	0,0833	0,0000	-0,0625	0,0417	0	0	0
-0,2500	0,0000	0,0000	0,3750	0,0000	0,0000	-0,1250	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0625	-0,0625	0,0000	0,0703	-0,0469	0,0000	-0,0078	0,0156
0,0000	0,0625	0,0417	0,0000	-0,0469	0,1250	0,0000	-0,0156	0,0208
0	0	0	-0,1250	0,0000	0,0000	0,1250	0,0000	0,0000
0	0	0	0,0000	-0,0078	-0,0156	0,0000	0,0078	-0,0156
0	0	0	0,0000	0,0156	0,0208	0,0000	-0,0156	0,0417

La matrice de rigidité précédente a un déterminant nul, ainsi seul un mouvement de corps rigide peut être exprimé (ce qui ne correspond pas aux résultats souhaités).

9.2 Prise en compte des conditions d'appuis

$$[K] \cdot [u] = [F_{nodales}] + [Re]$$

Avec la matrice de déplacement $[u] = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \beta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \beta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$

La matrice des forces nodales équivalentes : $[F_{nodales}] = \begin{pmatrix} -N_{12}^0 \\ -V_{12}^0 \\ -M_{12}^0 \\ -(N_{21}^0 + N_{23}^0) \\ -(V_{21}^0 + V_{23}^0) \\ -(M_{21}^0 + M_{23}^0) \\ -N_{32}^0 \\ -V_{32}^0 \\ -M_{32}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10000 \\ -6667 \\ 0 \\ -10000 \\ 6667 \end{pmatrix}$

La matrice des réactions d'appuis : $[Re] = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Certaines valeurs de déplacement et de rotation sont connues puisque le nœud 1 est un encastrement et le nœud 3 est un appui simple.

$$[u] = \begin{pmatrix} u_1 = 0 \\ v_1 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ u_2 \\ v_2 \\ \beta_2 \\ u_3 \\ v_3 = 0 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

Puisque ces valeurs sont connues, il convient alors de supprimer la 1^{ère} ligne et la 1^{ère} colonne, la 2^{ème} ligne et la 2^{ème} colonne, la 3^{ème} ligne et la 3^{ème} colonne ainsi que la 8^{ème} ligne et la 8^{ème} colonne de l'équation

$$[K] \cdot [u] = [F_{nodales}] + [Re]$$

La matrice de rigidité globale initialement égale à

0,2500	0,0000	0,0000	-0,2500	0,0000	0,0000	0	0	0
0,0000	0,0625	0,0625	0,0000	-0,0625	0,0625	0	0	0
0,0000	0,0625	0,0833	0,0000	-0,0625	0,0417	0	0	0
-0,2500	0,0000	0,0000	0,3750	0,0000	0,0000	-0,1250	0,0000	0,0000
0,0000	-0,0625	-0,0625	0,0000	0,0703	-0,0469	0,0000	-0,0078	0,0156
0,0000	0,0625	0,0417	0,0000	-0,0469	0,1250	0,0000	-0,0156	0,0208
0	0	0	-0,1250	0,0000	0,0000	0,1250	0,0000	0,0000
0	0	0	0,0000	-0,0078	-0,0156	0,0000	0,0078	-0,0156
0	0	0	0,0000	0,0156	0,0208	0,0000	-0,0156	0,0417

Est réduite à

$$\begin{pmatrix} 0.375 & 0 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0.0703 & -0.0469 & 0 & 0.0156 \\ 0 & -0.0469 & 0.125 & 0 & 0.0208 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0.0156 & 0.0208 & 0 & 0.0417 \end{pmatrix}$$

Cette matrice a un déterminant non nul donc, l'équation réduite a une solution :

$$210000 \cdot 10^6 \cdot \begin{pmatrix} 0.375 & 0 & 0 & -0.125 & 0 \\ 0 & 0.0703 & -0.0469 & 0 & 0.0156 \\ 0 & -0.0469 & 0.125 & 0 & 0.0208 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 \\ 0 & 0.0156 & 0.0208 & 0 & 0.0417 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \beta_2 \\ u_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10000 \\ -6667 \\ 0 \\ 6667 \end{pmatrix}$$

Au final, les valeurs sont :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \beta_2 \\ u_3 \\ \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ m} \\ -2,14 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ -1,44 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ 0 \text{ m} \\ 2,28 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{pmatrix}$$

9.3 Obtention des torseurs

Pour chaque élément de poutre 2D :

$$[T_{ij}] = [K_{ij}] \cdot [u_{ij}] - [F_{nodales}]$$

En développant :

$$\begin{pmatrix} N_{ij} \\ V_{ij} \\ M_{ij} \\ N_{ji} \\ V_{ji} \\ M_{ji} \end{pmatrix} = [K_{ij}] \cdot \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ \beta_i \\ u_j \\ v_j \\ \beta_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} N_{12}^0 \\ V_{12}^0 \\ M_{12}^0 \\ N_{32}^0 \\ V_{32}^0 \\ M_{32}^0 \end{pmatrix}$$

Tronçon de poutre [1]-[2] : $0 < x < 2$

$$\begin{pmatrix} N_{12} \\ V_{12} \\ M_{12} \\ N_{21} \\ V_{21} \\ M_{21} \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} 0.25 & 0 & 0 & -0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0.0625 & 0 & -0.0625 & 0.0625 \\ 0 & 0.0625 & 0.0833 & 0 & -0.0625 & 0.0417 \\ -0.25 & 0 & 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0625 & -0.0625 & 0 & 0.0625 & -0.0625 \\ 0 & 0.0625 & 0.0417 & 0 & -0.0625 & 0.0833 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 = 0 \text{ m} \\ v_1 = 0 \text{ m} \\ \beta_1 = 0 \text{ rad} \\ u_2 = 0 \text{ m} \\ v_2 = -2,14 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \beta_2 = -1,44 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ N} \\ 9200 \text{ N} \\ 15500 \text{ N.m} \\ 0 \text{ N} \\ -9200 \text{ N} \\ 3000 \text{ N.m} \end{pmatrix}$$

L'effort normal est nul en tout point.

$$M_{12}(x) = M_{iso}(x) - M_{12} \cdot \frac{2-x}{2} + M_{21} \cdot \frac{x}{2} = -15500 \cdot \frac{2-x}{2} + 3000 \cdot \frac{x}{2} = 9250 \cdot x - 15500$$

$$V_{12}(x) = -9250$$

Tronçon de poutre [2]-[3] : $2 < x < 6$

$$\begin{pmatrix} N_{23} \\ V_{23} \\ M_{23} \\ N_{32} \\ V_{32} \\ M_{32} \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} 0.125 & 0 & 0 & -0.125 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0078 & 0.0156 & 0 & -0.0078 & 0.0156 \\ 0 & 0.0156 & 0.0417 & 0 & -0.0156 & 0.0208 \\ -0.125 & 0 & 0 & 0.125 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0078 & -0.0156 & 0 & 0.0078 & -0.0156 \\ 0 & 0.0156 & 0.0208 & 0 & -0.0156 & 0.0417 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_2 = 0 \text{ m} \\ v_2 = -2,14 \cdot 10^{-6} \text{ m} \\ \beta_2 = -1,44 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \\ u_3 = 0 \text{ m} \\ v_3 = 0 \\ \beta_3 = 2,28 \cdot 10^{-6} \text{ rad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10000 \\ 6667 \\ 0 \\ 10000 \\ -6667 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \text{ N} \\ 9200 \text{ N} \\ -3000 \text{ N.m} \\ 0 \text{ N} \\ 10800 \text{ N} \\ 0 \text{ N.m} \end{pmatrix}$$

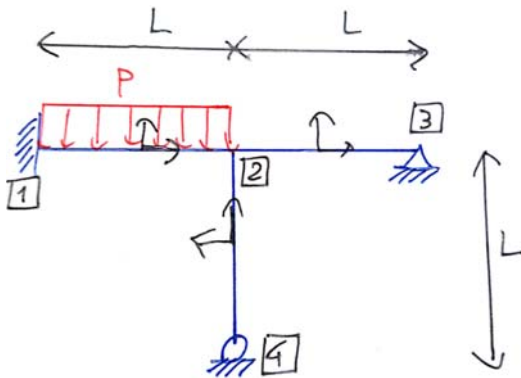
L'effort normal est nul en tout point.

Posons $X = x - 2$

$$\begin{aligned} M_{23}(X) &= M_{iso}(X) - M_{23} \cdot \frac{4-X}{4} + M_{32} \cdot \frac{X}{4} \\ &= \frac{5000 \cdot X}{2} \cdot (4-X) + 3000 \cdot \frac{4-X}{4} \\ &= -2500 \cdot X^2 + 9250 \cdot X + 3000 \end{aligned}$$

$$V_{23}(x) = 5000 \cdot X - 9250$$

9.4 Exercices



Avec :

$K_i^{[ij]}$: matrice représentant la rigidité du nœud $[i]$

$K_j^{[ij]}$: matrice représentant la rigidité du nœud $[j]$

$K_{ij}^{[ij]}$: facteur de transmission du nœud $[i]$ vers $[j]$

$K_{ji}^{[ij]}$: facteur de transmission du nœud $[j]$ vers $[i]$

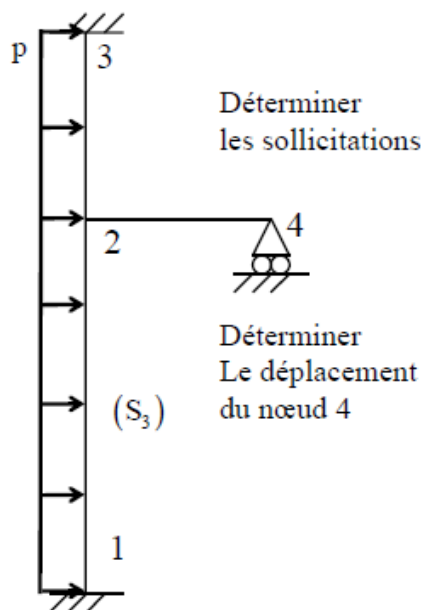
Pour un élément de poutre 2D entre les nœuds $[i]$ et les nœuds $[j]$

La matrice de rigidité élémentaire est

notée :
$$\begin{pmatrix} K_i^{[ij]} & K_j^{[ij]} \\ K_{ji}^{[ij]} & K_{ij}^{[ij]} \end{pmatrix}$$

- 1) Quelle est la taille de matrice représentant la rigidité d'un nœud ?
- 2) Quelle est la taille de la matrice représentant le facteur de transmission ?
- 3) Quels sont les paramètres d'un élément fini 2D d'une poutre ?
- 4) Ecrire les matrices élémentaires de rigidité de chaque élément de poutre en respectant la notation de l'énoncé.
- 5) Assembler la matrice de rigidité de la structure
- 6) Ecrire le deuxième membre de l'égalité
- 7) Combien de conditions aux limites sont connues ?
- 8) En déduire la taille de matrice inversible et réécrire $[u]$ et le deuxième membre après prise en compte des conditions aux limites.

9.5 Extrait des annales 2013



Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis

Précisez les 6 paramètres d'un élément fini poutre dans ce problème

Quelle est la taille de la matrice de rigidité élémentaire de cet élément

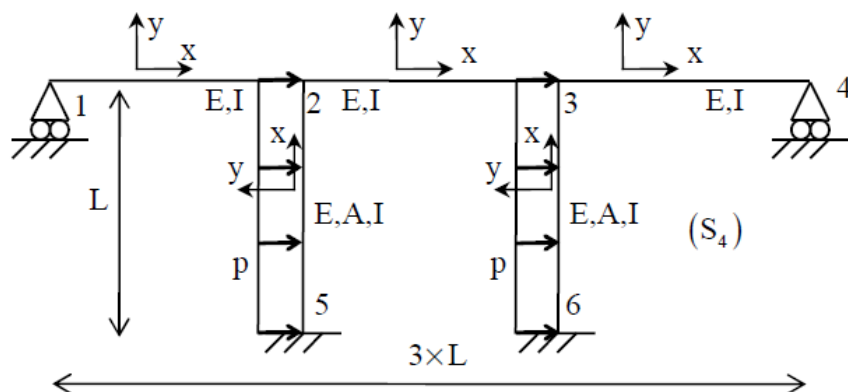
Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale

Quelle est la taille de la matrice inversée par le système

Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est concentrée au nœud 2
(Force ponctuelle horizontale de $3pL$ appliquée au nœud 2)

Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage

9.6 Extrait des annales 2014



Partie IV : Méthode des éléments finis (3 pts)

Répondre entièrement sur le **Doc Réponse**

Quelle est la taille de la matrice de rigidité élémentaire d'un élément poutre pour des problèmes en 3D

La structure précédente est résolue par un logiciel de calcul des structures basé sur la méthode des éléments finis :

Quelle est la taille de la matrice de rigidité globale pour le système (S_4)

Quelle est la taille de la sous matrice inversible par le système

Comment change la matrice de rigidité globale si la force répartie est remplacée par une force concentrée globalement équivalente horizontale $2pL$ appliquée au milieu de la poutre 2-3

Indiquez dans les deux cas le second membre mis en place après l'assemblage

.....