

Sommaire

10. Contraintes normales	2
11. Calcul d'une flèche (Hors programme).....	14
12. Noyau central	24
13. Etude de l'effort tranchant dans les sections massives	37
14. Etude de l'effort tranchant dans les sections minces symétriques	44
15. Etude de la torsion.....	48
16. Principe de la précontrainte	53

10. Contraintes normales

10.1 Etude des contraintes normales

10.1.1 Rappel sur les hypothèses sur les déformations

Enoncé du principe de NAVIER BERNOULLI

« Après déformation de la poutre, les sections normales à la fibre moyenne (les sections droites), restent planes et normales à la fibre moyenne ».

Conséquences

La déformation est sous la forme d'un plan donc : $\varepsilon_x = A + By + Cz$

10.2 Calculs analytiques

10.2.1 Expression

$$\sigma = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z$$

Résultat

σ : contrainte normale [Pa]

Données obtenues à partir des diagrammes de sollicitations :

N : Effort normal [N]
 M_z : moment fléchissant autour de \vec{z} [MN.m]
 M_y : moment fléchissant autour de \vec{y} [MN.m]

Caractéristiques géométriques de la section :

S : Surface [m²]
 I_z : moment d'inertie selon \vec{z} [m⁴]
 I_y : moment d'inertie selon \vec{y} [m⁴]

Coordonnées du point pour lequel on calcule la valeur de la contrainte à l'intérieur de la section :

y [m]
z [m]

10.2.2 Convention de signe

ATTENTION : la convention de signe est différente entre l'effort normal N du diagramme de sollicitation et la contrainte normale σ pour la traction ou la compression.

<u>Effort normal</u> (N en [N])	$N > 0$: compression supplémentaire Nota : ça ne signifie pas que la section est complètement comprimée ! Puisque le moment fléchissant apporte de la traction et de la compression (selon la position du point pour lequel on calcule les contraintes). $N < 0$: traction supplémentaire
<u>Contrainte normale</u> (σ en [Pa])	$\sigma > 0$: point où il y a de la traction $\sigma < 0$: point où il y a de la compression $\sigma = 0$: point sans contrainte normale (ni tendu, ni comprimé) – définition de l'axe neutre

10.3 Différents types de sollicitations

10.3.1 Traction et compression simple

Définition d'une traction ou compression simple

Une section droite est sollicitée en traction simple (resp. compression simple) si et seulement si les sollicitations se résument à un effort normal $N < 0$ (resp. $N > 0$) au niveau du centre de gravité de la section.

C'est-à-dire que :

$$M_z = M_y = T_y = T_z = M_t = 0$$

Et $N \neq 0$

Définition d'une flexion simple

Une section droite est sollicitée en flexion simple si et seulement si un unique moment fléchissant est non nul et que l'effort normal est nul.

C'est-à-dire que :

M_z ou M_y non nul

Et $N = 0$

Définition d'une flexion composée

Une section droite est sollicitée en flexion composée si et seulement si un unique moment fléchissant est non nul et que l'effort normal est non nul.

C'est-à-dire que :

M_z ou M_y non nul

Et $N \neq 0$

Définition d'une flexion déviée

Une section droite est sollicitée en flexion déviée si et seulement si deux moments fléchissant sont non nuls.

- Lorsque l'effort normal est nul, la flexion est dite déviée
- Lorsque l'effort normal est non nul, la flexion est dite déviée composée

C'est-à-dire que :

M_z et M_y non nul

Et

$N = 0$ pour une flexion déviée

Ou

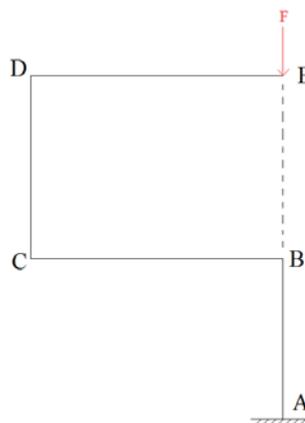
$N \neq 0$ pour une flexion déviée composée

Le tableau suivant résume les définitions précédentes :

Type de sollicitation	N	M_y	M_z
Traction (si $N < 0$) ou compression pure (si $N > 0$)	$\neq 0$	$= 0$	$= 0$
Flexion simple autour de l'axe z	$= 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion simple autour de l'axe y	$= 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion composée autour de l'axe z	$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Flexion composée autour de l'axe y	$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$
Flexion déviée	$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Flexion déviée composée	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

Exemple

Donner les différents types de sollicitations sur chacun des tronçons suivants :



Réponse

Tronçon AB : $\begin{cases} N \neq 0 \\ M_z = 0 \end{cases} \rightarrow$ compression simple si $F > 0$ (ou traction simple si $F < 0$)

Tronçons BC et DE : $\begin{cases} N = 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases} \rightarrow$ flexion simple

Tronçon CD : $\begin{cases} N \neq 0 \\ M_z \neq 0 \end{cases} \rightarrow$ flexion composée

10.4 Axe neutre

10.4.1 Définitions

Définition de l'axe neutre

Axe neutre : ensemble des points dont la contrainte normale est nulle

10.4.2 Déterminer la position de l'axe neutre

Propriété

L'axe neutre est la droite d'équation

$$\sigma(y, z) = 0 \Leftrightarrow \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0 .$$

Nota : Il est la frontière entre la zone comprimée et zone tendue :

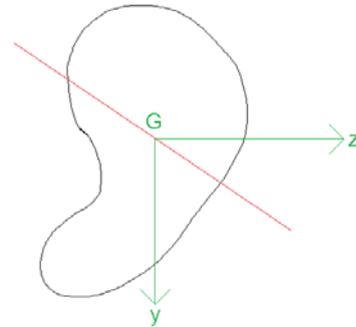
- Lorsque l'A.N. coupe la section : la section est partiellement comprimée
- Lorsque l'A.N. ne coupe pas la section :
 - o La section est entièrement comprimée si $N > 0$
 - o La section est entièrement tendue si $N < 0$

10.4.2.1 *Position de l'axe neutre*

Influence de l'effort normal (PRINCIPE 1) :

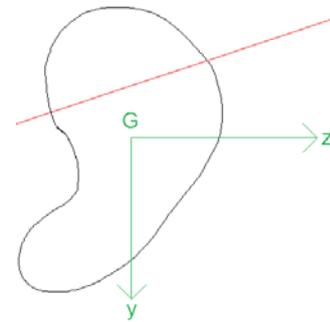
L'axe neutre passe par le centre de gravité G de la section si $N = 0$.

Exemple



L'axe neutre ne passe pas par le centre de gravité G de la section si $N \neq 0$.

Exemple



Influence des moments fléchissants (PRINCIPE 2) :

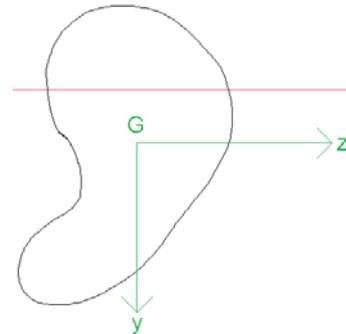
L'axe neutre est parallèle à l'axe \vec{z} lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y = 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe \vec{z})

Exemple



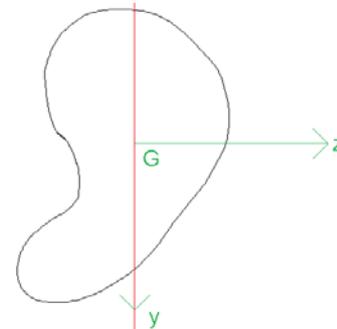
L'axe neutre est parallèle à l'axe \vec{y} lorsque :

$$M_z = 0$$

$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion simple ou composée autour de l'axe \vec{y})

Exemple



L'axe neutre n'est parallèle, ni à l'axe \vec{z} , ni à l'axe \vec{y} lorsque :

$$M_z \neq 0$$

$$M_y \neq 0$$

(cas de la flexion déviée simple ou déviée composée)

Exemple

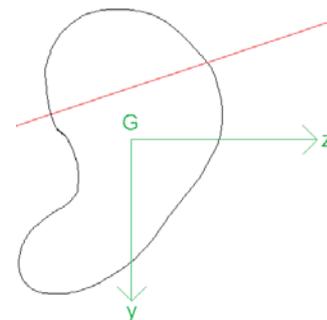
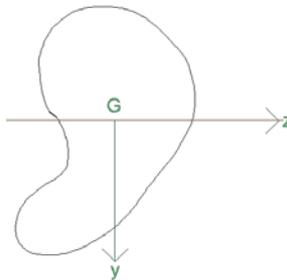
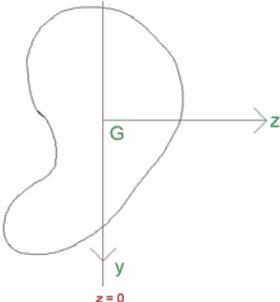
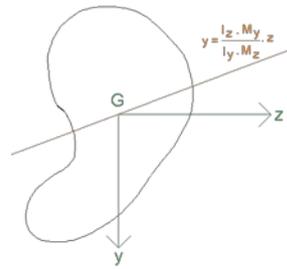
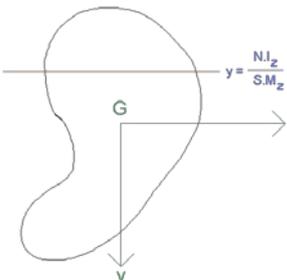
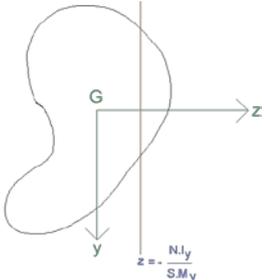
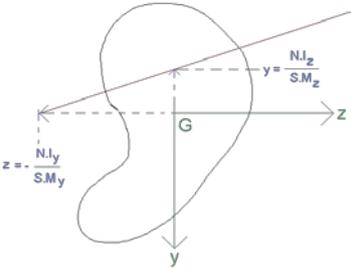
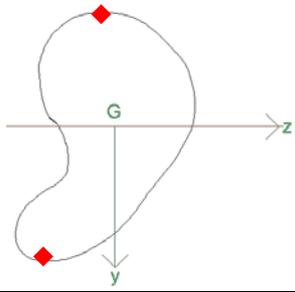
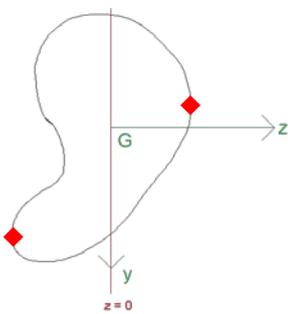
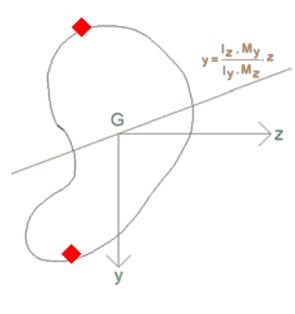
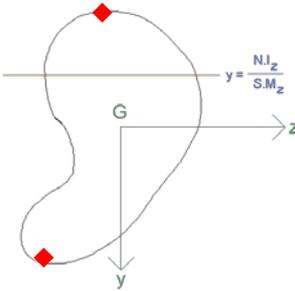
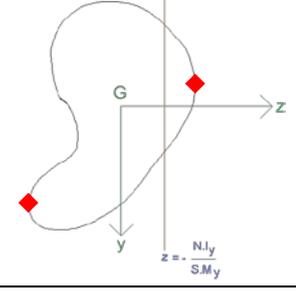
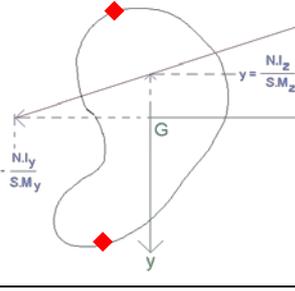


Tableau récapitulatif des 2 principes et de l'équation de l'axe neutre :

		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = 0$ 
	$M_y \neq 0$	L'axe neutre est la droite d'équation : $z = 0$ 	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = \frac{I_z \cdot M_y}{I_y \cdot M_z} z$ 
$N \neq 0$	$M_y = 0$	Il n'existe pas d'axe neutre. La section est - soit entièrement tendue (si $N < 0$) - soit entièrement comprimée (si $N > 0$)	L'axe neutre est la droite d'équation : $y = \frac{N \cdot I_z}{S \cdot M_z}$ 
	$M_y \neq 0$	L'axe neutre est la droite d'équation : $z = -\frac{N \cdot I_y}{S \cdot M_y}$ 	L'axe neutre est la droite passant par les points $\begin{pmatrix} \frac{N I_z}{S M_z} \\ 0 \end{pmatrix}_{G; \bar{y}; \bar{z}}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{N I_y}{S M_y} \end{pmatrix}_{G; \bar{y}; \bar{z}}$ 

10.4.3 Position des points les plus sollicités (pour lesquels il convient de calculer les contraintes)

Les points les plus sollicités sont les points de la section les plus éloignés de l'axe neutre. Il convient donc de calculer les contraintes en ces points : ♦

		$M_z = 0$	$M_z \neq 0$
$N = 0$	$M_y = 0$	Sans objet (pas de sollicitation)	
	$M_y \neq 0$		
$N \neq 0$	$M_y = 0$	Il n'existe pas d'axe neutre. La section est - soit entièrement tendue (si $N < 0$) - soit entièrement comprimée (si $N > 0$)	
	$M_y \neq 0$		

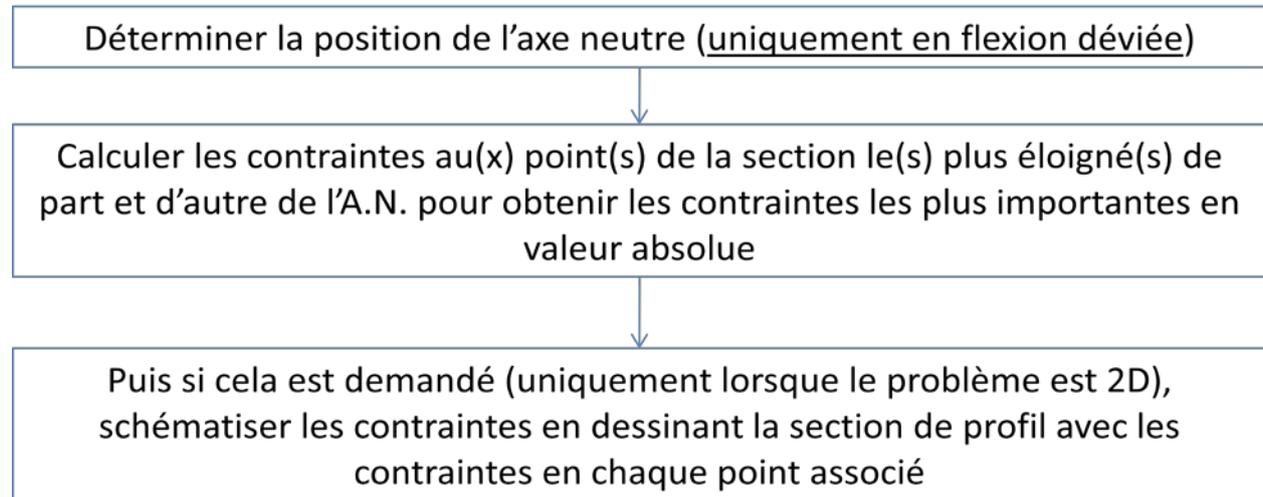
Remarque : On notera qu'en flexion non déviée (c'est-à-dire simple ou composée), la position des points les plus sollicités est connue sans connaître la position exacte de l'axe neutre :

- $M_z \neq 0$ et $M_y = 0$:
 - o Point(s) d'ordonnée y la plus grande (définition de la fibre inférieure)
 - o Point(s) d'ordonnée y la plus petite (définition de la fibre supérieure)
- $M_z = 0$ et $M_y \neq 0$:
 - o Point(s) de coordonnée z la plus grande (point(s) « le(s) plus à droite »)
 - o Point(s) de coordonnée z la plus petite (point(s) « le(s) plus à gauche »)

Ainsi la position de l'axe neutre n'est importante que lorsque la flexion est déviée pour pouvoir positionner les points les plus sollicités en contraintes normales.

10.5 Méthode

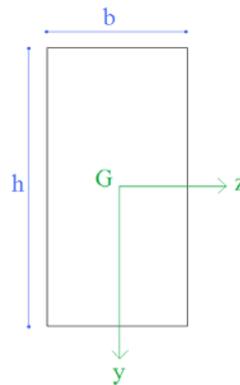
10.5.1 Logigramme



10.5.2 Exemples

10.5.2.1 Géométrie des exemples

$$b = 0,5 \text{ m}$$
$$h = 1 \text{ m}$$



Donc

$$S = 1 \times 0,5 = 0,5 \text{ m}^2$$

$$I_z = \frac{0,5 \times 1^3}{12} \approx 0,042 \text{ m}^4$$

$$I_y = \frac{1 \times 0,5^3}{12} \approx 0,010 \text{ m}^4$$

Exemple 1 :

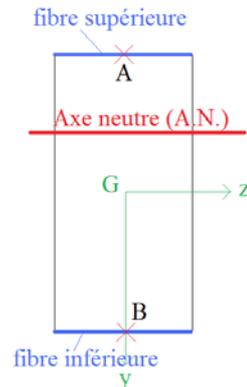
$$N = - 2500 \text{ N}$$

$$M_z = 1000 \text{ N.m}$$

$$M_y = 0 \text{ N.m}$$

Détermination de l'axe neutre

Etape inutile, puisque l'axe neutre est parallèle à l'axe z



Calculs des contraintes au niveau des points les plus éloignés de l'A.N.

Calcul sur

- n'importe quel point de la fibre supérieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en A (-h/2 ; 0)

$$\begin{aligned} \sigma_A &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_A - \frac{M_y}{I_y} z_A \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{0}{0,010} \times 0 \\ &= -7000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

- n'importe quel point de la fibre inférieure puisqu'ils sont tous à égale distance de l'A.N. Par exemple en B (h/2 ; 0)

$$\begin{aligned} \sigma_B &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_B - \frac{M_y}{I_y} z_B \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{1}{2} - \frac{0}{0,010} \times 0 \\ &= 17000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Exemple 2 :

$$N = -2500 \text{ N}$$

$$M_z = 1000 \text{ N.m}$$

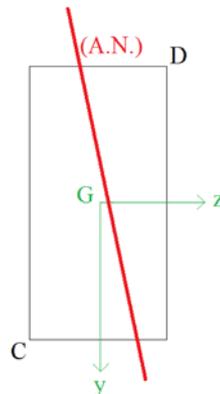
$$M_y = 1500 \text{ N.m}$$

Détermination de l'axe neutre

$$\frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{-2500}{0,5 \times 1} + \frac{1000}{\frac{0,5 \times 1^3}{12}} \times y - \frac{1500}{\frac{1 \times 0,5^3}{12}} \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 6z - 0,21$$



Calculs des contraintes au niveau des points les plus éloignés de l'A.N.

Calculs des contraintes en C ($h/2$; $-b/2$) et en D ($-h/2$; $b/2$) car ils sont les plus éloignés de l'A.N. :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_c - \frac{M_y}{I_y} z_c \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{1}{2} - \frac{1500}{0,010} \times \frac{-0,5}{2} \\ &= 53000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_D - \frac{M_y}{I_y} z_D \\ &= -\frac{(-2500)}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{1500}{0,010} \times \frac{0,5}{2} \\ &= -43000 \text{ Pa} \end{aligned}$$

Exemple 3 :

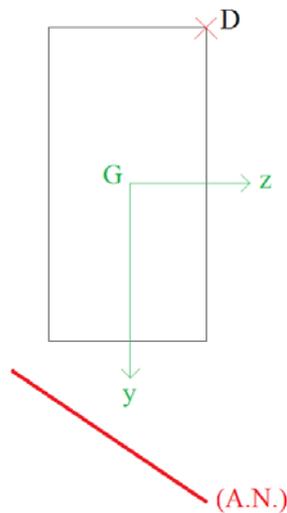
$$N = 10\,000 \text{ N}$$

$$M_z = 1000 \text{ N.m}$$

$$M_y = 150 \text{ N.m}$$

Détermination de l'axe neutre

$$\begin{aligned} \frac{-N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y - \frac{M_y}{I_y} z &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{10\,000}{0,5 \times 1} + \frac{1000}{\frac{0,5 \times 1^3}{12}} \times y - \frac{150}{\frac{1 \times 0,5^3}{12}} \times z &= 0 \\ \Leftrightarrow y &\approx 0,6 \cdot z + 0,83 \end{aligned}$$



Remarque importante : l'axe neutre ne coupe pas la section donc la section est entièrement comprimée puisque $N > 0$.

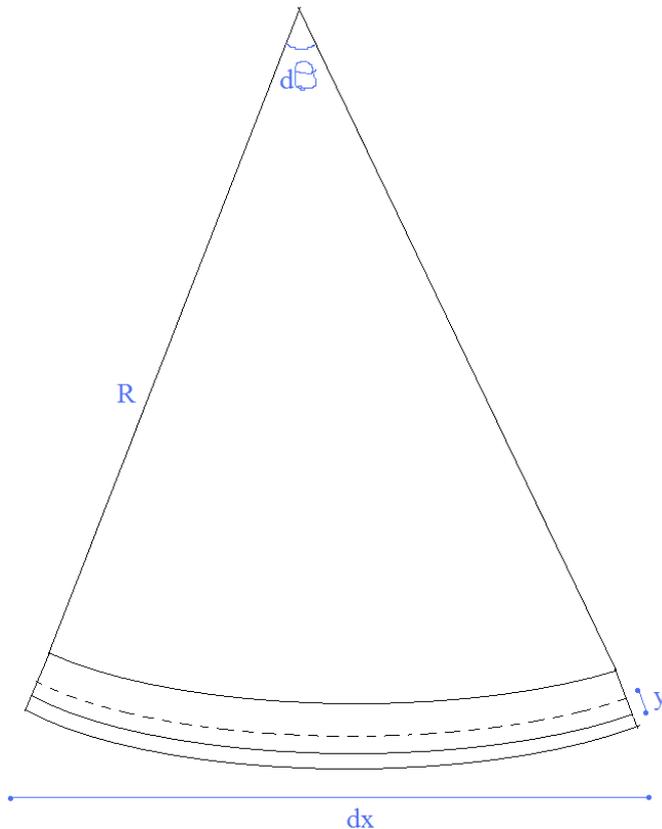
Calculs des contraintes au niveau du point le plus éloigné de l'A.N.

Calcul uniquement en D car aucun point de la section ne se trouve de l'autre côté de l'A.N.

$$\begin{aligned} \sigma_D &= -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y_D - \frac{M_y}{I_y} z_D \\ &= -\frac{10\,000}{0,5} + \frac{1000}{0,042} \times \frac{-1}{2} - \frac{150}{0,010} \times \frac{0,5}{2} \\ &= -35\,654 \text{ Pa} \end{aligned}$$

11. Calcul d'une flèche (Hors programme)

Hypothèse : flexion pure selon z



M_z est constant sur dx .

D'après les calculs précédents : $\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$

La loi de Hooke s'exprime par : $E\varepsilon_x = \sigma_x$

Ainsi : $\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} = \frac{M_z}{EI_z} y$

La définition de la déformation est : $\varepsilon_x = \frac{\text{longueur finale} - \text{longueur initiale}}{\text{longueur initiale}}$

D'où :

$$\varepsilon_x = \frac{(R + y)d\theta - Rd\theta}{Rd\theta} = \frac{y}{R}$$

Or la courbure d'une courbe plane est (voir cours prépa) :

$$R = - \frac{\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\frac{d^2v}{dx^2}}$$

Or $\left(1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right)^{3/2} \sim 1$

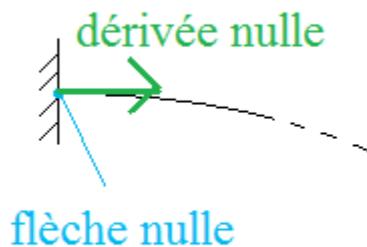
Donc $R \approx - \frac{1}{\frac{d^2v}{dx^2}}$ et : $\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2}$

Au final : $\boxed{EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -M_z(x)}$

Ainsi, la flèche se calcule par la double intégrale de $\frac{-M_z(x)}{EI_z}$.

Hors programme

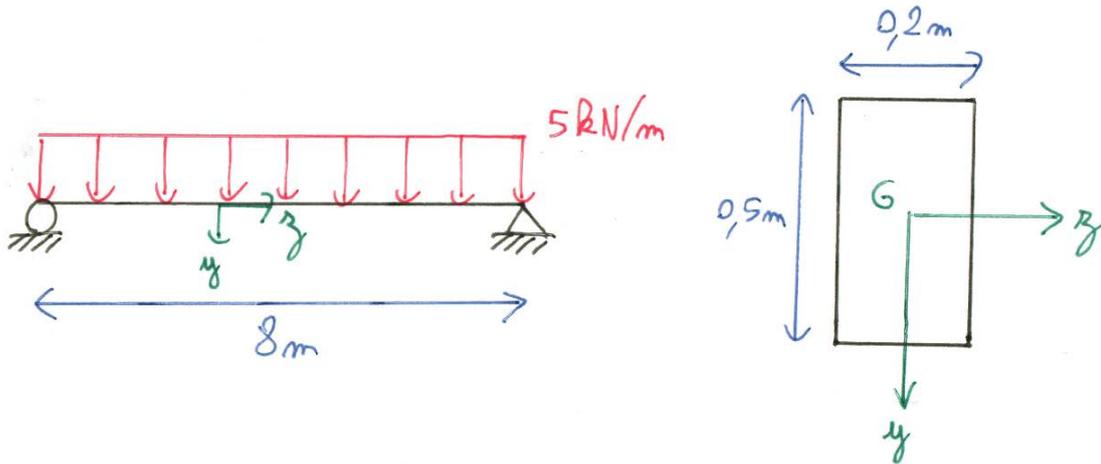
Pour intégrer, il convient de connaître les constantes en certains points de la flèche et/ou de sa dérivée :

	Représentation	Résultats sur la flèche	Résultats pour la dérivée de la flèche : $\frac{dv}{dx}$
Encastrement		$f = 0$	$\frac{dv}{dx} = 0$
Appui rotule ou appui simple		$f = 0$	
Centre d'une poutre symétrique pour la géométrie et pour le chargement			$\frac{dv}{dx} = 0$

Hors programme

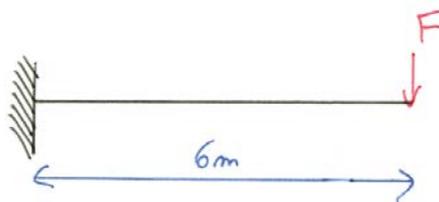
11.1 Exercices

Exercice [1]



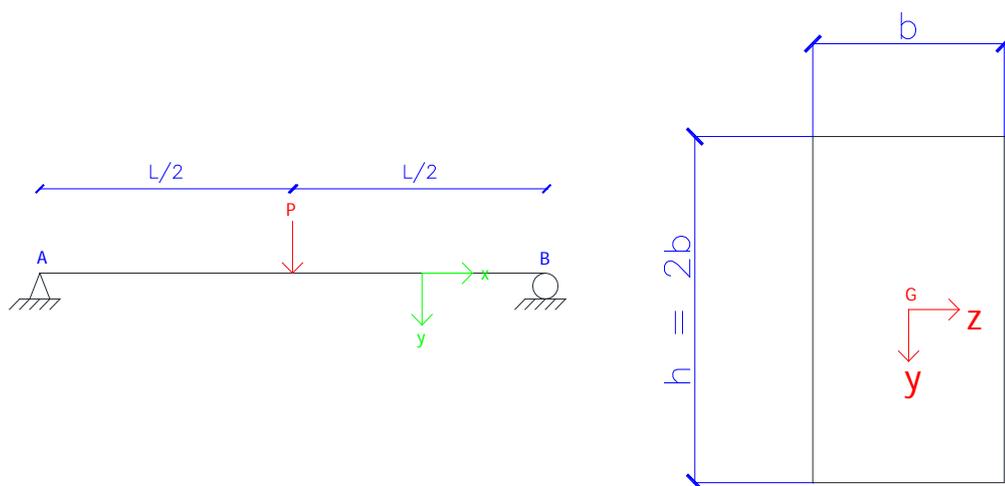
- 1) Calculer les contraintes normales maximales et minimales.
- 2) Avec $E = 25 \text{ GPa}$, calculer la flèche maximale.

Exercice [2]



Avec une section rectangulaire de hauteur 1,20 m et de largeur 0,50 m et un matériau résistant à une contrainte maximale de 10 MPa en valeur absolue, calculer la force maximale pouvant être supportée par la poutre ci-contre.

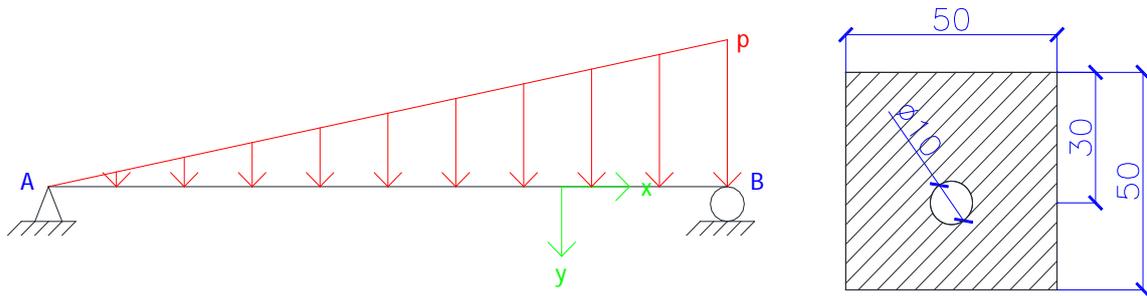
Exercice [3]



Trouver h tel que :
$$\begin{cases} \text{condition sur la contrainte : } |\sigma_{\max}| \leq \bar{\sigma} \\ \text{condition sur la flèche : } f_{\max} \leq \bar{f} = \frac{L}{200} \end{cases}$$

Remarque : le calcul de la flèche est hors programme RDM en 1^{ère} année ENTPE.

Exercice [4]



L'unité des côtes est le cm.

Données :

$$L = 5 \text{ m}$$

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

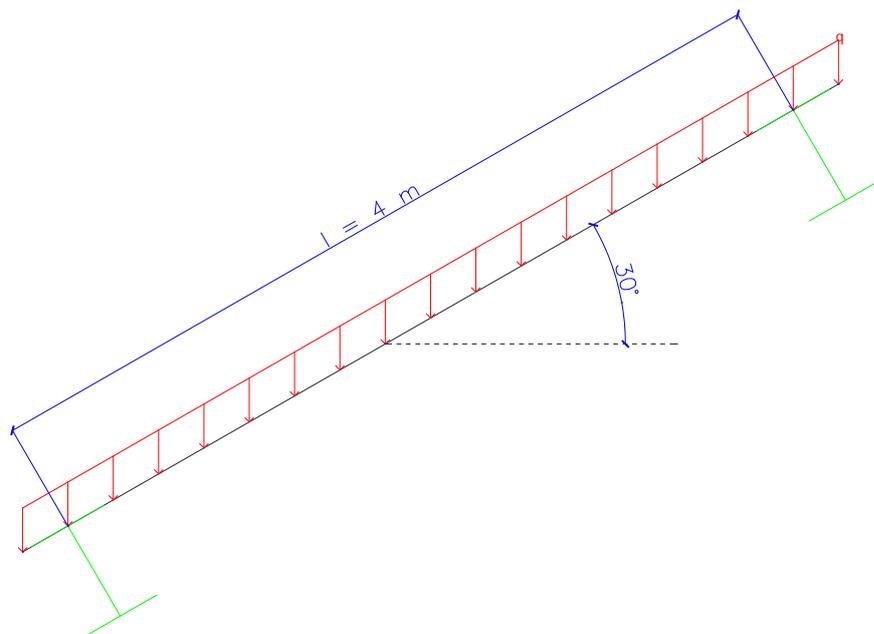
$$p = 2 \text{ kN/m}$$

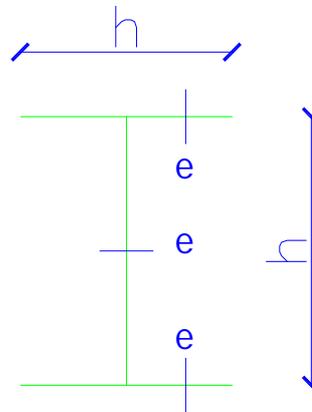
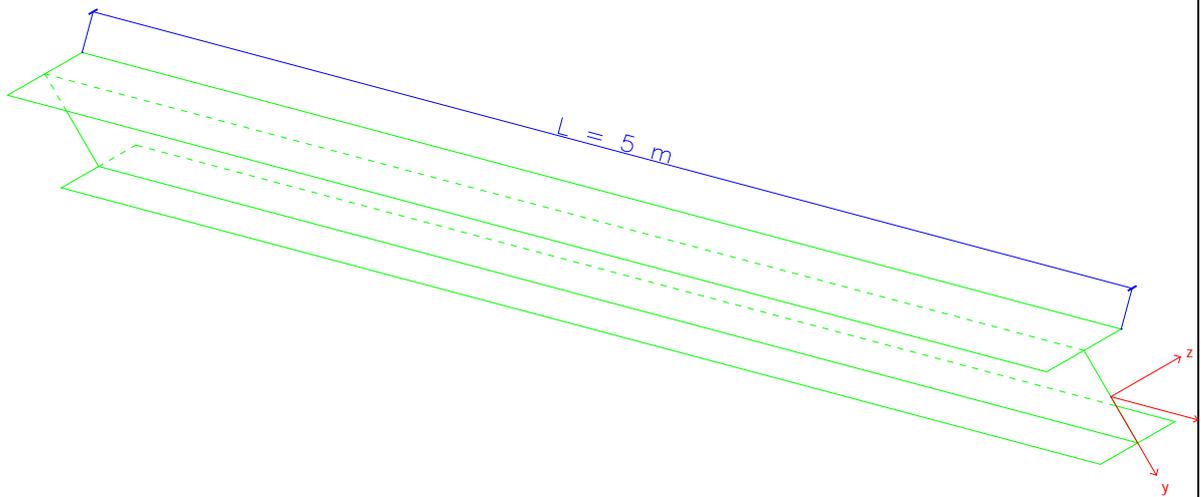
Calculer la contrainte maximale $\sigma_{x\max}$ et la flèche maximale f_{\max}

Remarque : le calcul de la flèche est hors programme RDM en 1^{ère} année ENTPE.

Exercice [5]

Flexion déviée – calcul d'une panne





Données

$e = h/10$

Poids propre : $g = 25 \text{ kg/m}^2$

Charge d'exploitation : $q = 250 \text{ kg/m}^2$

Espacement entre panne : $l = 4 \text{ m}$

Longueur des pannes : $L = 5 \text{ m}$

Angle du toit : 30°

Dimensionner le profilé en I afin de respecter les conditions suivantes :

- 1) $\sigma_{\max} \leq 200 \text{ MPa}$ avec le chargement « Q » seul
- 2) $\sigma_{\max} \leq 240 \text{ MPa}$ avec le chargement « Q + G »

Exercice [6]

Les forces ponctuelles P s'exercent au centre des arêtes aux points M_1 , M_2 et M_3 .

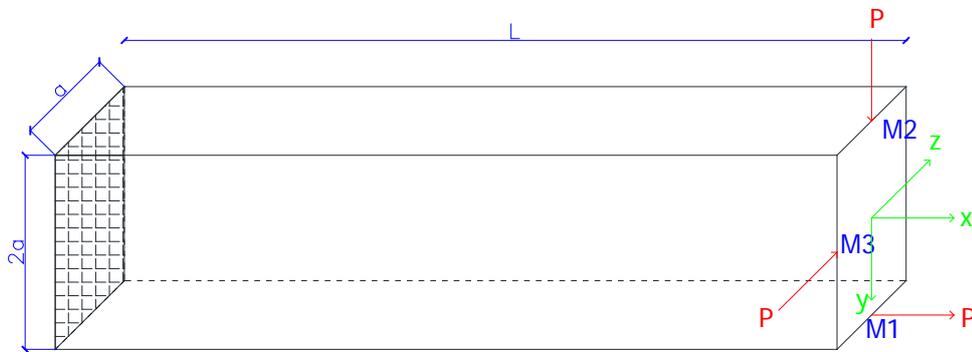
On supposera a très petit devant L .



est la face d'abscisse $x = 0$ et est **encastrée**.

En posant $K = \frac{x}{L}$, déterminer l'axe neutre pour différentes sections dont les valeurs de K sont :

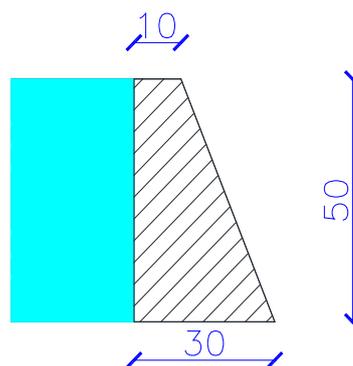
0 ; 0,5 et 1



Exercice [7]

Barrage poids

L'unité de ce schéma est le m.



On raisonnera sur une largeur de barrage de 1 m.

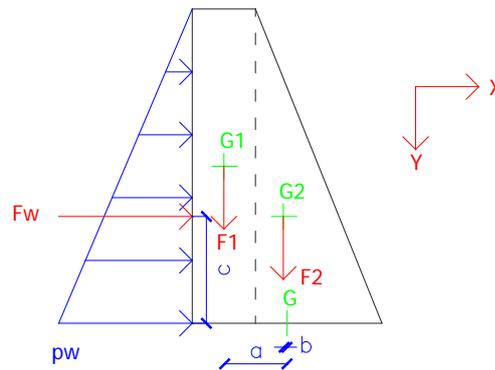
Données :

Masse volumique de l'eau : $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$

Masse volumique du béton : $\rho_{\text{béton}} = 2500 \text{ kg/m}^3$

Accélération de la gravité : $g = 10 \text{ m/s}^2$

1) En décomposant le barrage de la manière suivante



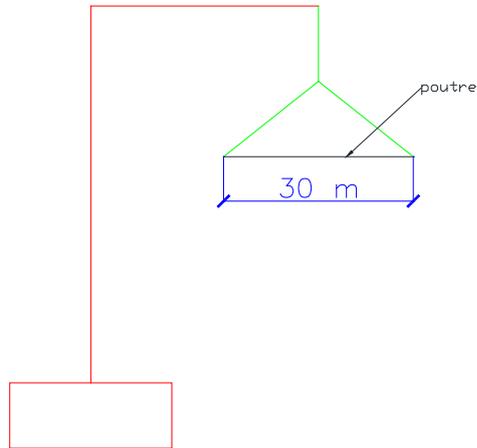
Déterminer

- la pression p_w due à l'eau à la base du barrage
 - la force équivalente F_w due à la pression de l'eau
 - les distances a , b et c
- Déterminer F_1 et F_2 .
 - En déduire l'effort normal N et le moment de flexion M_z au point G (centre de gravité de la base).
 - Donner la surface S et l'inertie I_z de la base (attention, raisonnement sur 1m de barrage).
 - Quelles sont les contraintes minimales et maximales à la base du barrage ?
 - Conclure : ce barrage est-il bien dimensionné ?

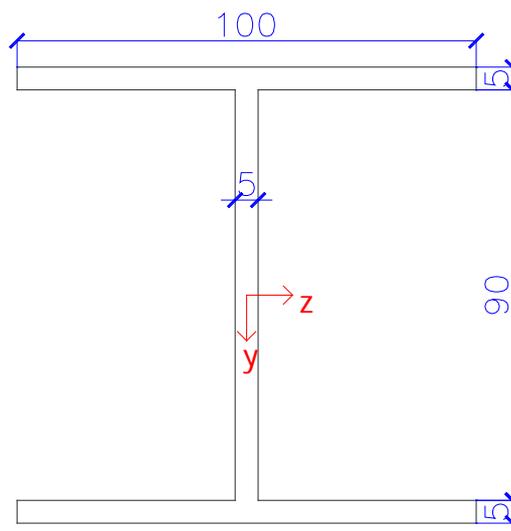
Exercice [8]

Problème du grutier

Un grutier propose de soulever une poutre de la manière suivante :



Les côtes de la section en mm sont :



La contrainte maximale du matériau est : $\sigma_{\max} = 240 \text{ MPa}$

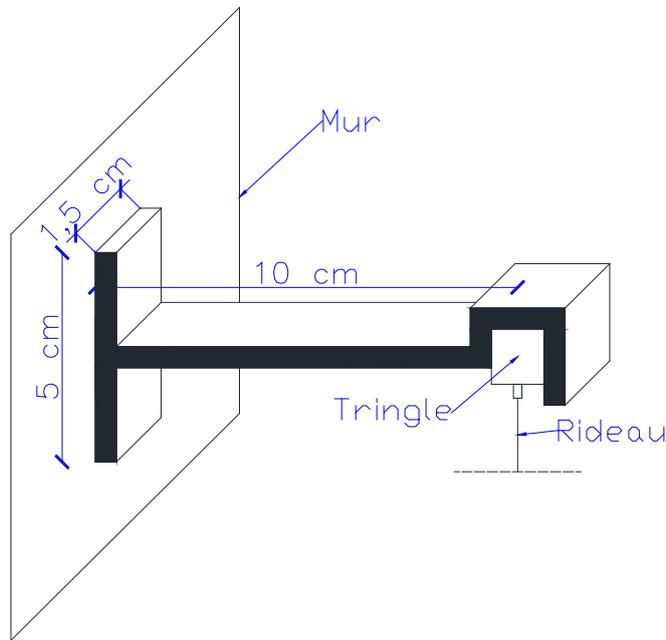
La masse volumique de l'acier est : $\rho_{\text{acier}} = 7850 \text{ kg/m}^3$

- 1) Pourquoi le conducteur de travaux refuse ?
- 2) Quelle solution simple peut-il apporter ?

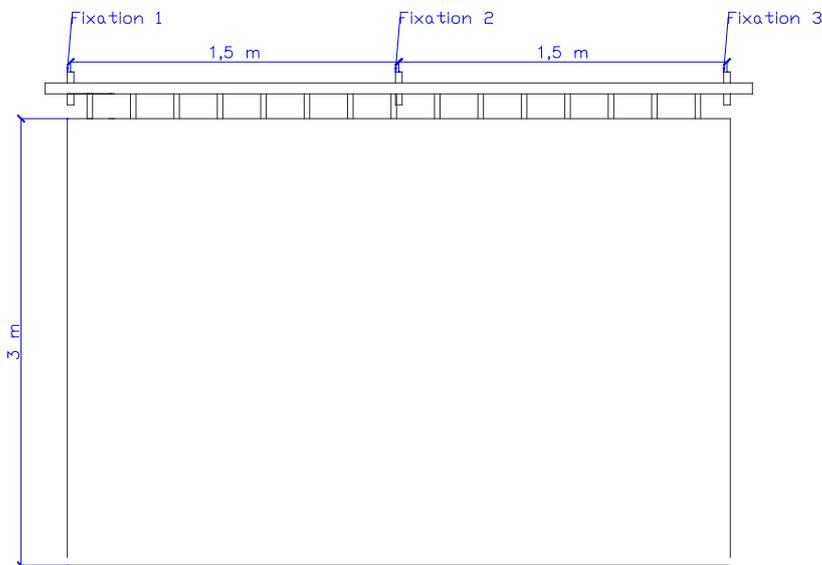
Exercice [9]

Fixation d'une tringle à rideau

Vue en perspective d'une fixation de tringle à rideau



La vue de face du rideau

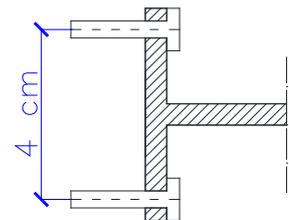


On admettra que la fixation 2 retient la moitié du poids du rideau et que les fixations 1 et 3 un quart du poids du rideau chacune.

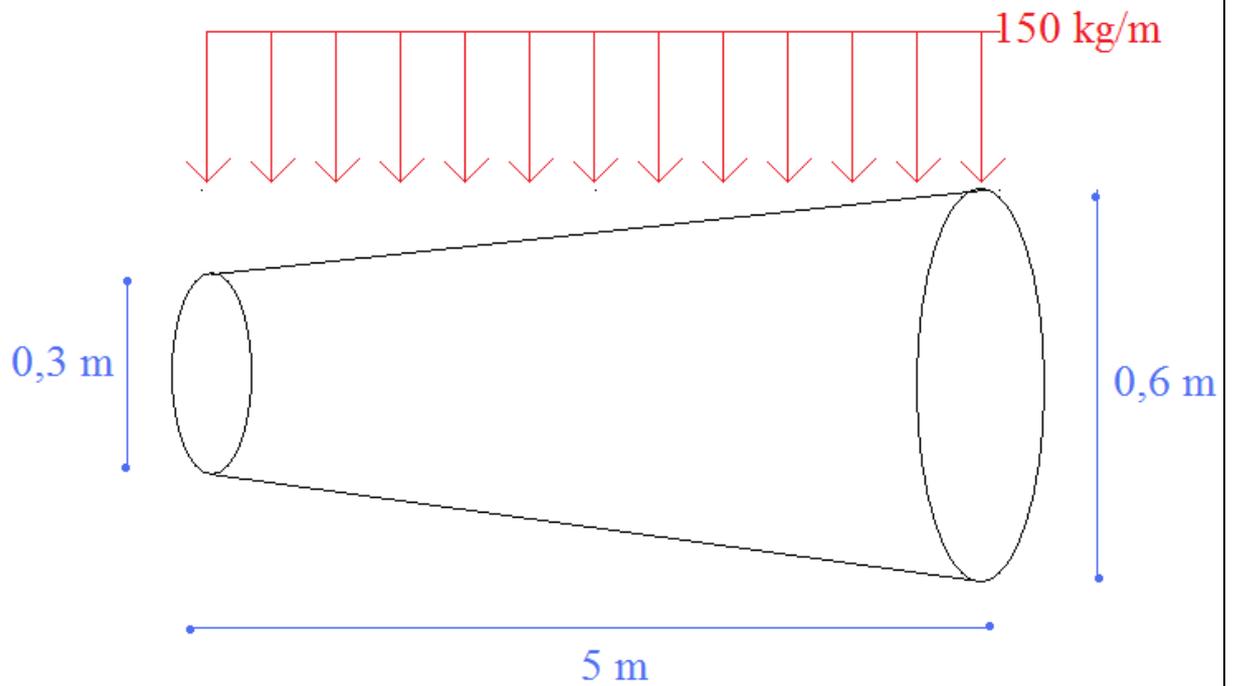
La masse surfacique du rideau est 450 g/m^2 .

1) Est-il possible de coller les fixations avec une colle résistante à 100 kg/m^2 ?

2) Si on choisit une solution avec des vis, dont la contrainte maximale doit être inférieure à 80 MPa , correspondant au schéma suivant, quel doit être le diamètre minimal des vis ?



Exercice [10]



Trouver la contrainte maximale σ_{\max} .

12. Noyau central

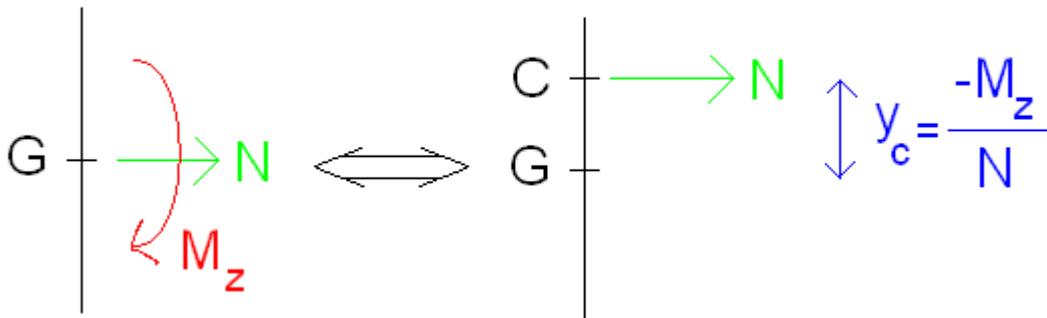
12.1 Point de passage

Définition du point de passage

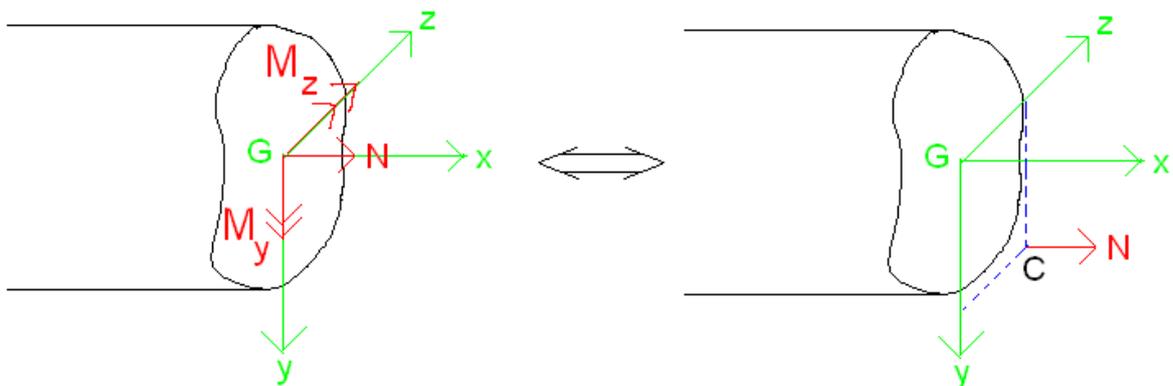
Point du plan de la section droite où le torseur des forces de gauche se réduit uniquement à l'effort normal.

Remarque : ce point est également appelé centre de flexion.

En 2D :



En 3D :

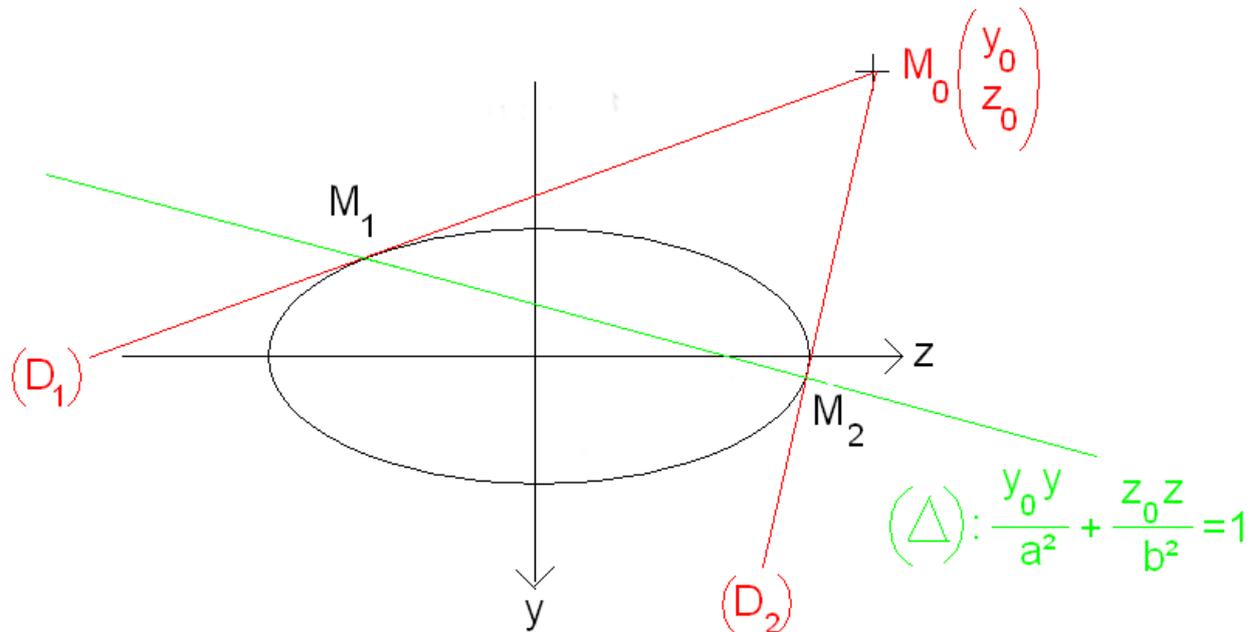


Avec $y_c = \frac{-M_z}{N}$ et $z_c = \frac{M_y}{N}$

12.2 Outils mathématiques

12.2.1 Polaire d'un point par rapport à une ellipse

(D₁) et (D₂) sont les droites tangentes à l'ellipse passant par le point M₀.



Equation d'une ellipse

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Définition d'une polaire par rapport à un point

La polaire de M₀ par rapport à l'ellipse est la droite (Δ) qui passe par M₁ et M₂.

M₀ est le pôle de la droite (Δ) par rapport à l'ellipse.

Définition d'une antipolaire par rapport à un point

L'antipolaire de M₀ par rapport à l'ellipse est la droite (Δ') qui est symétrique par rapport au centre de gravité de la polaire (Δ) de M₀ (par rapport à l'ellipse).

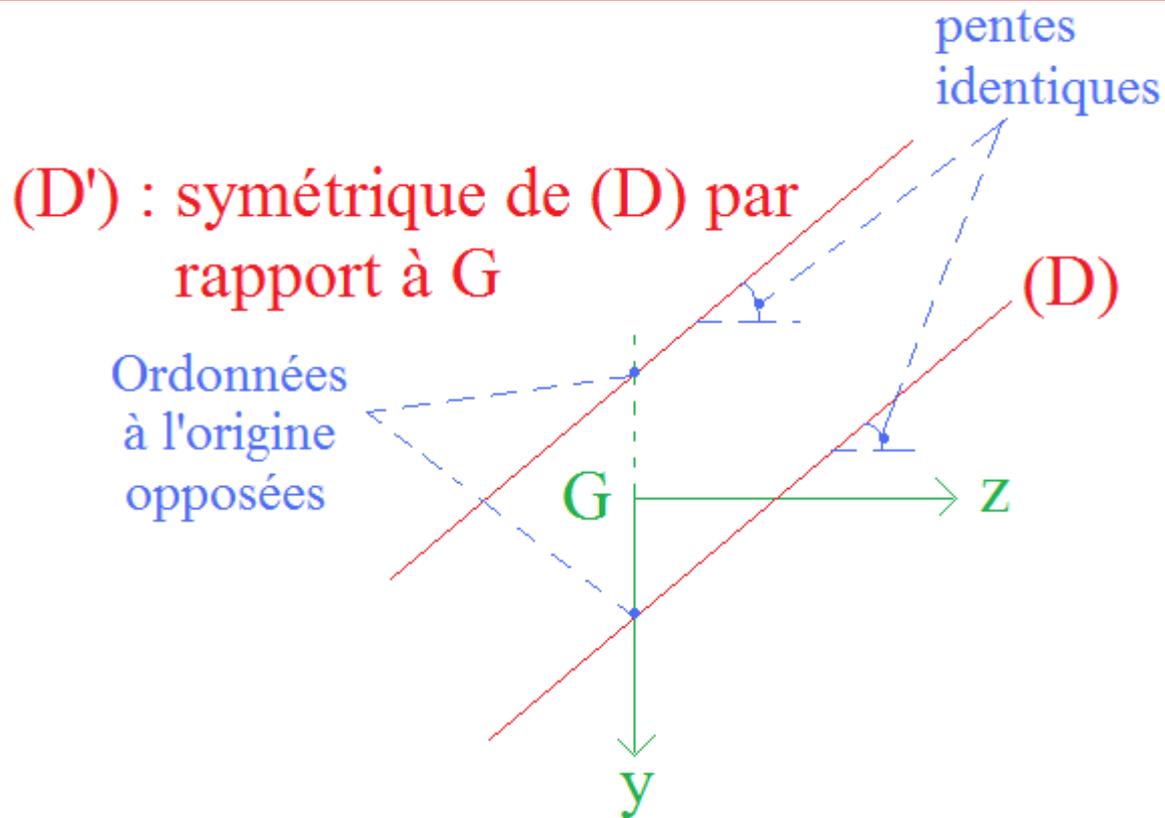
Equation de la droite symétrique à une droite par rapport à G

Soit une droite (D) d'équation de type :

$$y = A.z + B$$

La droite symétrique (D') par rapport à l'origine de notre repère (dans le contexte de la RDM, il s'agit de G) a pour propriétés :

- La pente de la droite symétrique par rapport à G reste inchangée
- l'ordonnée à l'origine de la droite symétrique par rapport G a un signe opposé par rapport à la droite initiale



Ainsi, la symétrie par rapport à G est la droite (D') d'équation :

$$y = A.z - B$$

12.3 Application en RDM- Ellipse centrale d'inertie

Définition d'une ellipse centrale d'inertie (ECI)

L'ECI est définie par l'équation :

$$\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$$

S : aire de la section

I_z (resp. I_y) : moments d'inertie par rapport à l'axe Z (resp. Y)

Equation d'une polaire d'un point par rapport à l'ECI

En posant un point M_0 un point de coordonnées :

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}_{Gyz}$$

La polaire de M_0 par rapport à l'ellipse est la droite (Δ) a pour équation :

$$\frac{yy_0}{I_z} + \frac{zz_0}{I_y} = \frac{1}{S}$$

12.4 Noyau central d'une section droite

Définition du noyau central

Zone telle que :

Si le point de passage appartient au noyau central (frontière incluse) alors l'axe neutre ne coupe pas la section

Sinon l'axe neutre coupe la section.

Propriété

Pour une section donnée, le noyau central est l'ensemble des points qui sont à l'intérieur de l'ensemble des antipolaires des points du contour de la section par rapport à l'ECI.

12.5 Méthode

12.5.1 Logigramme

Calcul de l'ellipse d'inertie : $\frac{y^2}{I_z} + \frac{z^2}{I_y} = \frac{1}{S}$

1) Détermination de la position du centre de gravité

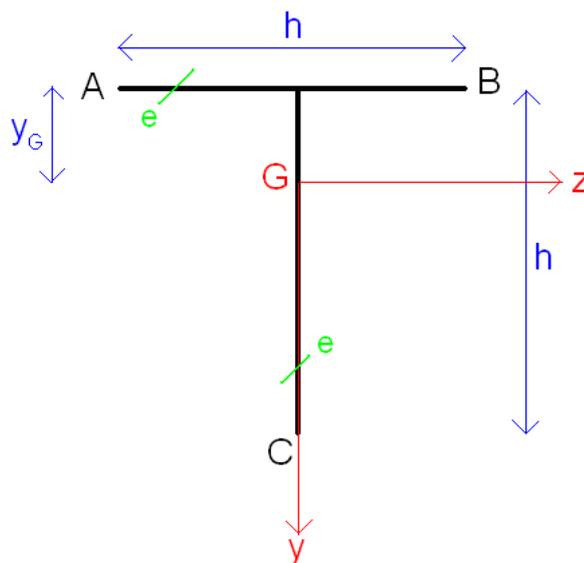
2) Détermination des caractéristiques géométriques de la section (surface S et moments d'inertie I_y et I_z)

A chaque point du contour M ($y_M ; z_M$), tracé de la polaire de M de droite d'équation : $\frac{y y_M}{I_z} + \frac{z z_M}{I_y} = \frac{1}{S}$

Pour chaque polaire, tracé de l'antipolaire (droite symétrique de la polaire par rapport au centre de gravité G de la section)

L'ensemble des points à l'intérieur des antipolaires constitue le noyau central (NC)

12.5.2 Exemple 1



Calculer puis dessiner le noyau central en supposant que $e \ll h$

Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

Moments d'inertie

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

ECl : $\frac{48y^2}{5h^2} + \frac{24z^2}{h^2} = 1$

Coordonnées des points du contour

$$A \begin{pmatrix} -h/4 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -h/4 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3h/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Polaire de A

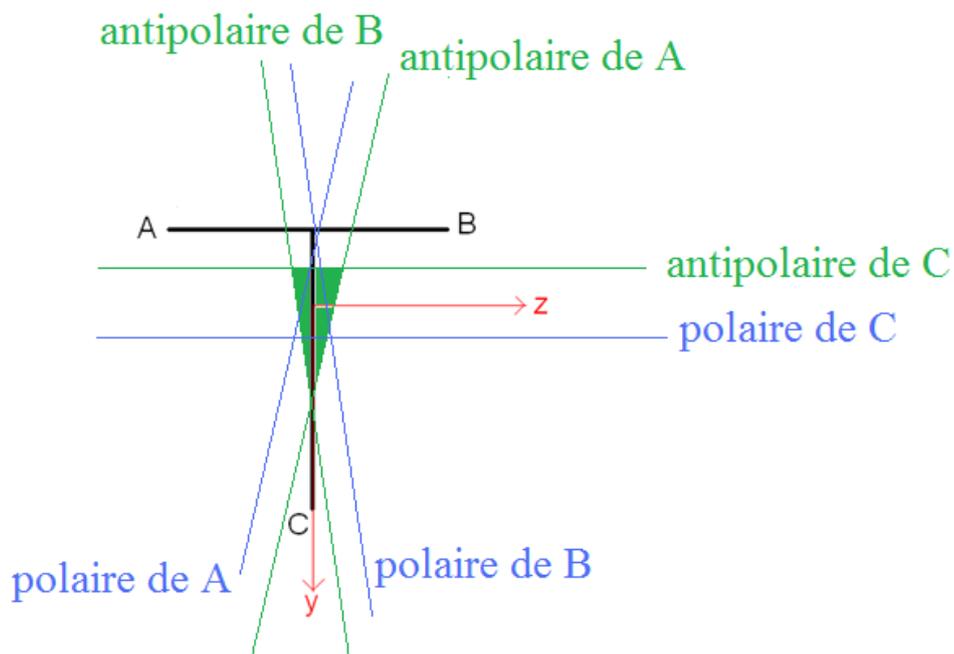
$$\begin{aligned} \frac{48y}{5h^2} \times \frac{-h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times \frac{-h}{2} &= 1 \\ \Rightarrow \frac{-12y}{5h} - \frac{12z}{h} &= 1 \end{aligned}$$

Polaire de B : La polaire de B est la symétrique de la polaire de A par rapport à l'axe \vec{y} .

Polaire de C

$$\begin{aligned} \frac{48y}{5h^2} \times \frac{3h}{4} + \frac{24z}{h^2} \times 0 &= 1 \\ \Rightarrow y &= \frac{5h}{36} \end{aligned}$$

Noyau central (surface verte)

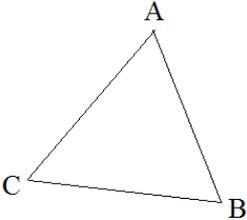
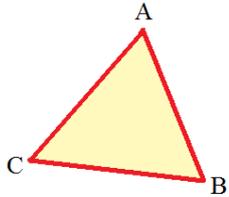
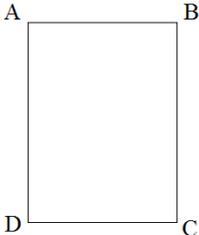
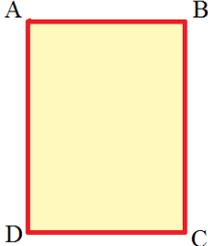
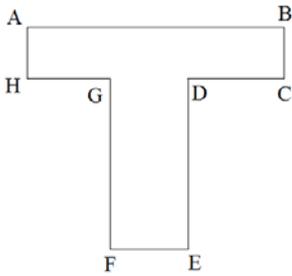
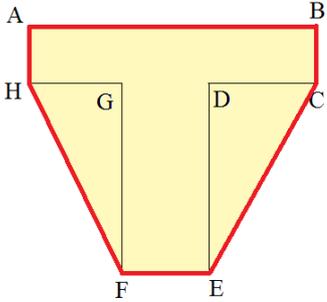
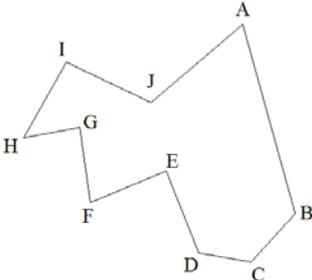
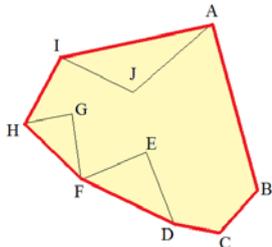


12.5.3 Méthodes pratiques pour « gagner en rapidité »

12.5.3.1 Choix des points du contour

Tous les points de contour ne sont pas à prendre en compte pour le tracé des antipolaires. Le choix se porte sur les points de contours tels que s'ils sont reliés les uns par rapport aux autres par des segments, ils forment une surface incluant tous les points de la section.

Exemples :

N°	Section	Points nécessaires pour le tracé des antipolaires	
1		<p>Les antipolaires de A, B et C doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.</p>	
2		<p>Les antipolaires de A, B, C et D doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.</p>	
3		<p>Les antipolaires de A, B, C, E, F et H doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.</p> <p>Les antipolaires de D et de G ne sont pas à tracer car ces points sont inclus dans la forme précédente.</p>	
4		<p>Les antipolaires de A, B, C, D, F, H et I doivent être calculées car en reliant ces points par des segments, l'intérieur de la nouvelle forme géométrique inclut tous les points de la section.</p> <p>Les antipolaires de E, G et J ne sont pas à tracer car ces points sont inclus dans la forme précédente.</p>	

12.5.3.2 Tracé des antipolaires

Les étapes 2 et 3 du logigramme (tracés de la polaire, puis de l'antipolaire qui est la droite symétrique par rapport à G) peuvent être résumées par :

Cas 1 :

M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y_M \neq 0 \\ z_M \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{yy_M}{I_z} + \frac{zz_M}{I_y} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow y = -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \cdot z + \frac{I_z}{S \cdot y_M}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de polaire par rapport à G, a donc pour équation :

$$y = -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \cdot z - \frac{I_z}{S \cdot y_M}$$

Cette droite passe par les points suivants :

$$N_1 \left(0 ; -\frac{I_y}{S \cdot z_M} \right)_{Gyz}$$

$$N_2 \left(-\frac{I_z}{S \cdot y_M} ; 0 \right)_{Gyz}$$

Cas 2 :

M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y_M = 0 \\ z_M \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{zz_M}{I_y} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow z = \frac{I_y}{z_M \times S}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de l'antipolaire a pour équation :

$$z = -\frac{I_y}{z_M \times S}$$

Cas 3 :

M a pour coordonnées $\begin{pmatrix} y_M \neq 0 \\ z_M = 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi la polaire a pour équation

$$\frac{yy_M}{I_z} = \frac{1}{S} \Leftrightarrow y = \frac{I_z}{y_M \times S}$$

L'antipolaire, qui est la droite symétrique de l'antipolaire a pour équation :

$$y = -\frac{I_z}{y_M \times S}$$

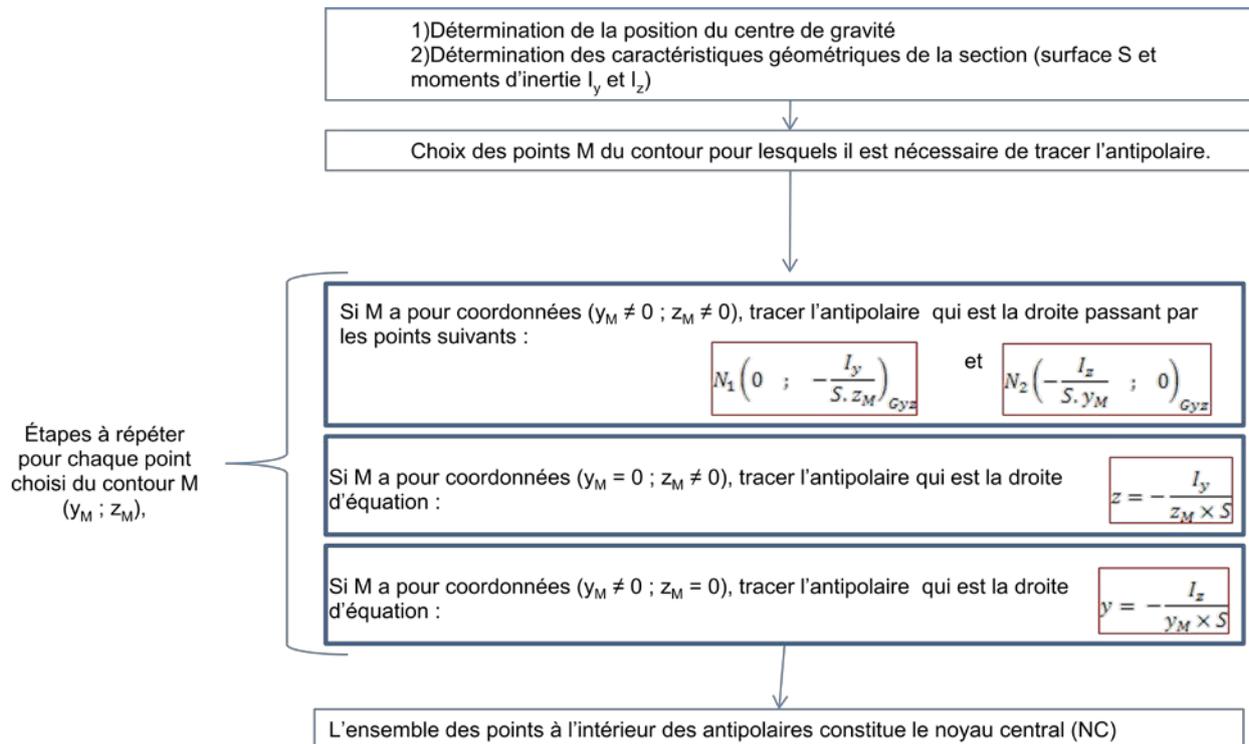
12.5.3.3 Propriété de symétrie des antipolaires

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'origine du repère G, alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à G.

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $G\vec{y}$, alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à l'axe $G\vec{y}$.

Lorsque M et M' sont symétriques par rapport à l'axe $G\vec{z}$, alors l'antipolaire de M est symétrique de l'antipolaire de M' par rapport à l'axe $G\vec{z}$.

12.5.3.4 Logigramme simplifié



L'exemple 1 aurait donc pu être traité (plus rapidement) par application du logigramme simplifié.

Position du centre de gravité

$$y_G = \frac{h}{4}$$

Propriétés géométriques

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{Gz} = \frac{5eh^3}{24}$$

$$S = 2eh$$

Choix des points de contour

$$A \begin{pmatrix} -h/4 \\ -h/2 \end{pmatrix} \quad B \begin{pmatrix} -h/4 \\ h/2 \end{pmatrix} \quad C \begin{pmatrix} 3h/4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : B est symétrique de A par rapport à l'axe $G\vec{y}$, ainsi il est inutile de calculer l'équation de l'antipolaire de B puisqu'il suffit de tracer la symétrique de l'antipolaire de A par rapport à l'axe $G\vec{y}$.

Antipolaire de A

$$\begin{pmatrix} y_A \neq 0 \\ z_A \neq 0 \end{pmatrix}_{Gyz} \Rightarrow \text{l'antipolaire passe par les points}$$

$$N_1 \left(\begin{matrix} 0 \\ -\frac{I_{Gy}}{S \cdot z_A} = \frac{eh^3}{12} \cdot \frac{1}{2eh \cdot (-h/2)} = -\frac{h}{12} \end{matrix} \right)_{Gyz}$$

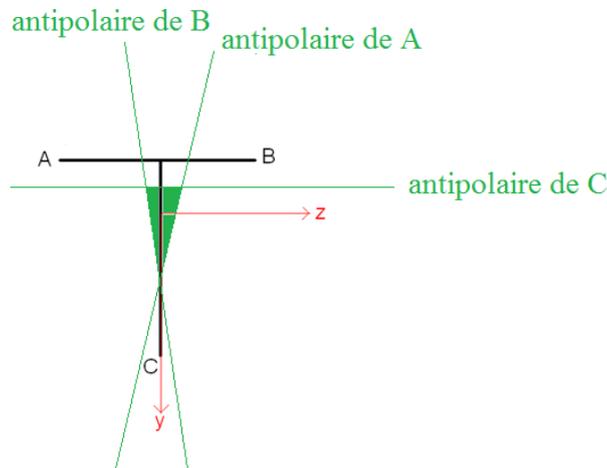
$$N_2 \left(-\frac{I_{Gz}}{S \cdot y_A} = -\frac{5h}{12} ; \boxed{0} \right)_{Gyz}$$

Antipolaire de B : L'antipolaire de B est la symétrique de l'antipolaire de A par rapport à l'axe \vec{Gy} .

Antipolaire de C

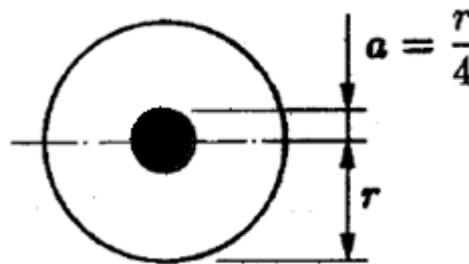
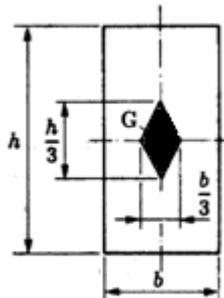
$$\begin{pmatrix} y_C \neq 0 \\ z_C = 0 \end{pmatrix}_{Gyz} \Rightarrow \text{l'antipolaire a pour equation : } y = -\frac{I_z}{y_C \times S} = -\frac{5h}{36}$$

Noyau central (surface verte)



12.5.4 Résultats à connaître

NC des sections pleines rectangulaires et circulaires

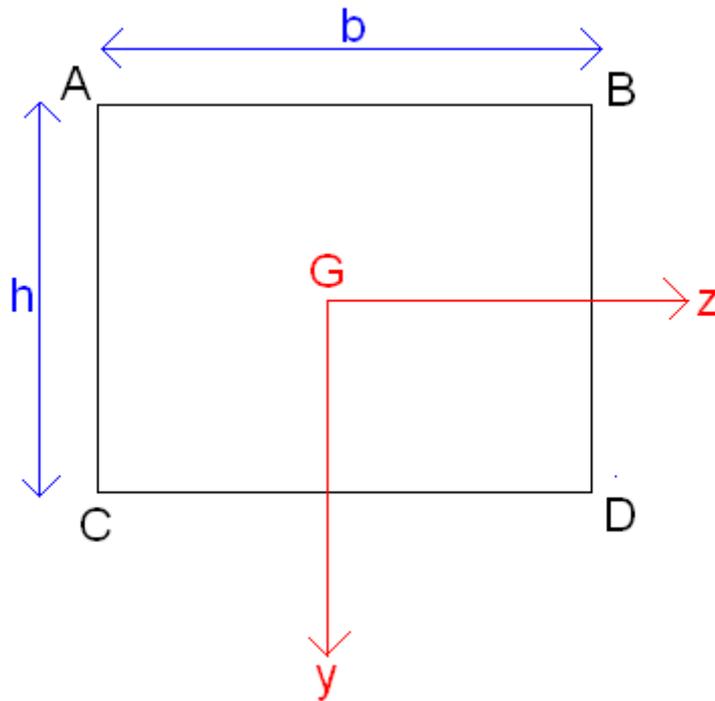


Utilisation du noyau central pour une force N excentrée

	Etat de la section	$N \in (NC)$	$N \notin (NC)$
	$N > 0$	Entièrement comprimée	Section partiellement comprimée
	$N < 0$	Entièrement tendue	

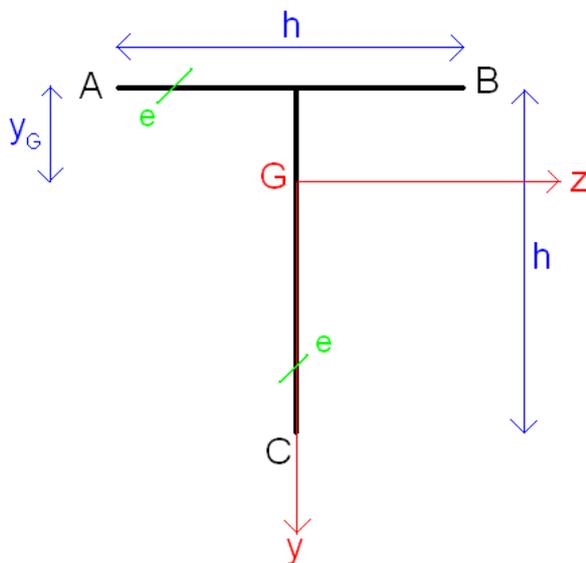
12.6 Exercices

Exercice [11]



Calculer puis dessiner le noyau central d'une section rectangulaire de largeur b et de hauteur h .

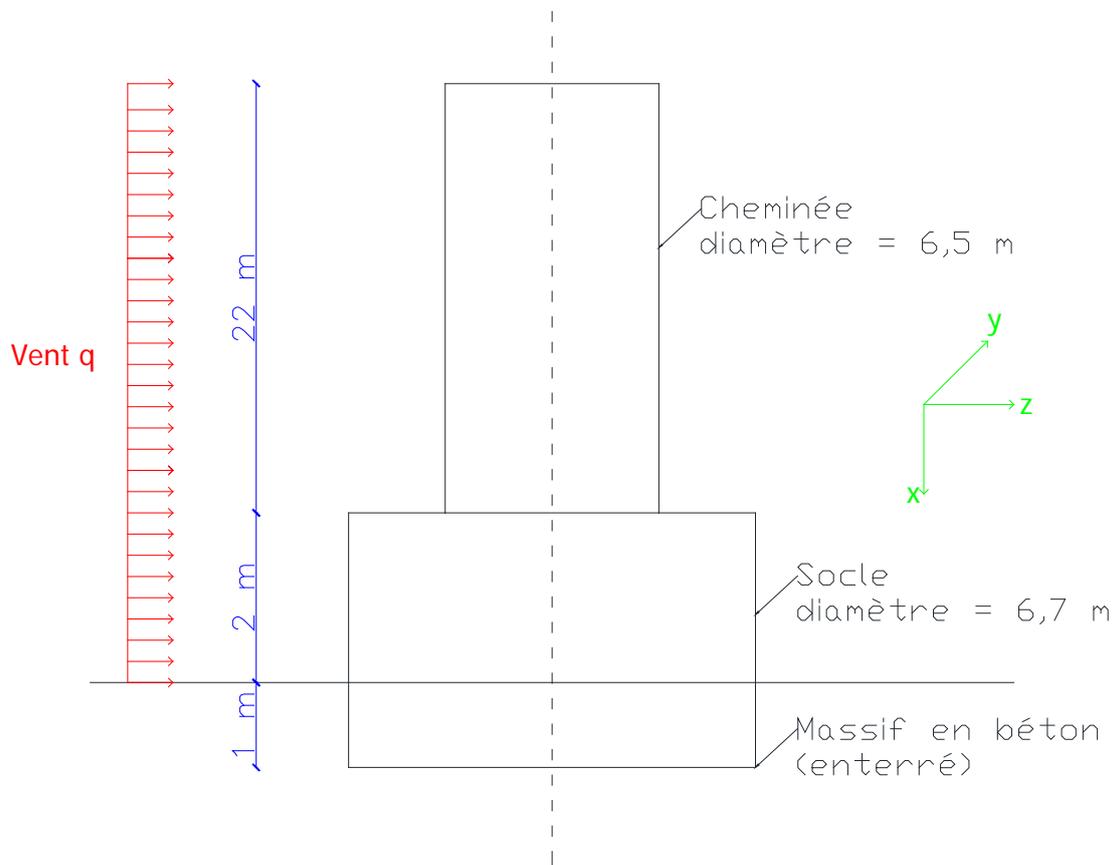
Exercice [12]



Calculer puis dessiner le noyau central en supposant que $e \ll h$

Exercice [13]

Etude de la stabilité d'une cheminée



Une structure formée d'une cheminée de 480 tonnes, reposant sur un socle en béton de 120 tonnes, repose sur un massif de béton de densité massique de $2,3 \text{ tonnes/m}^3$.

Cette structure est soumise à l'action du vent de densité de 200 kg/m^2 .

La résultante de H de cette force peut être donnée par la relation de Lery : $H = \frac{2}{3} qS$

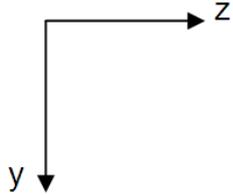
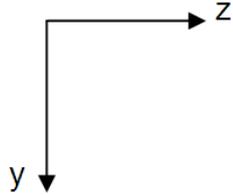
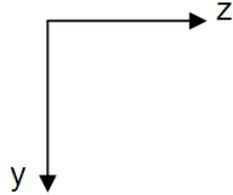
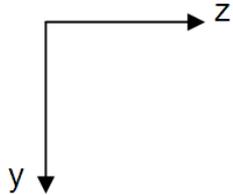
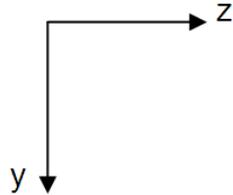
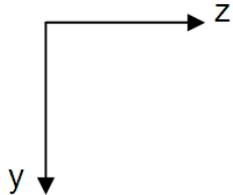
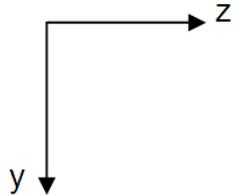
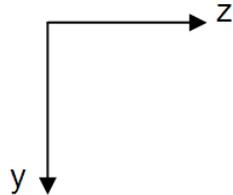
Où S est le maître couple : $S = \text{diamètre} \times \text{hauteur}$

- 1) Calculer la position du centre de pression (ou encore appelé point de passage) sous la surface d'assise (sous le massif en béton)
- 2) Chercher la position de l'axe neutre et tracer le diagramme de répartition des contraintes dans la section d'assise.
- 3) Vérifier que la section est comprimée.

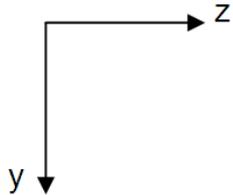
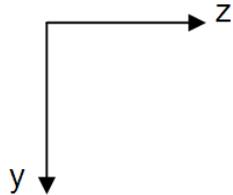
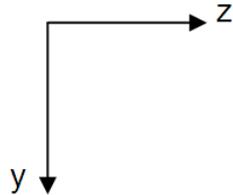
Exercice [14]

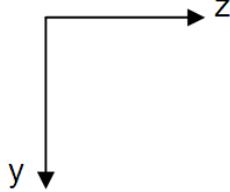
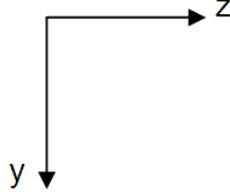
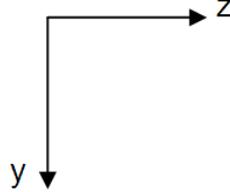
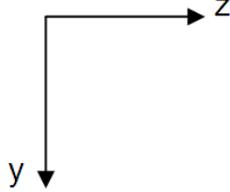
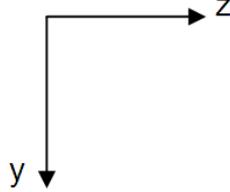
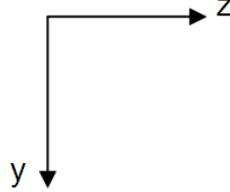
Dessiner l'état de contrainte d'une section pour les situations suivantes (hachurer zone tendue) :

1) $N = 0$

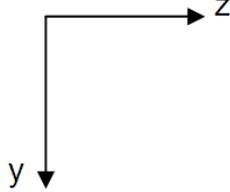
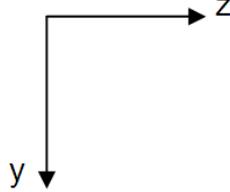
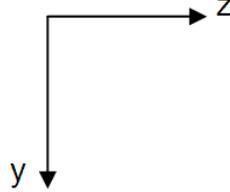
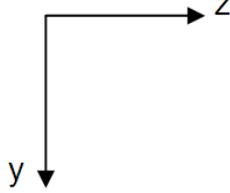
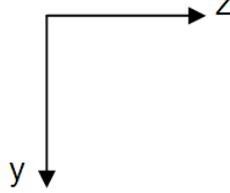
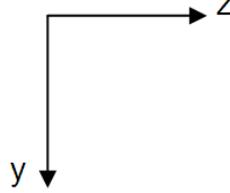
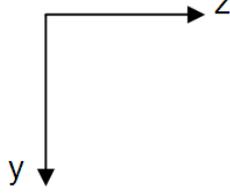
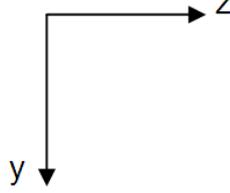
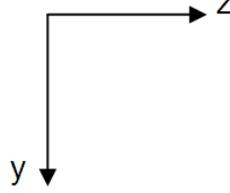
	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			
$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

2) $N > 0$

	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			

$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

1) $N < 0$

	$M_y < 0$	$M_y = 0$	$M_y > 0$
$M_z < 0$			
$M_z = 0$			
$M_z > 0$			

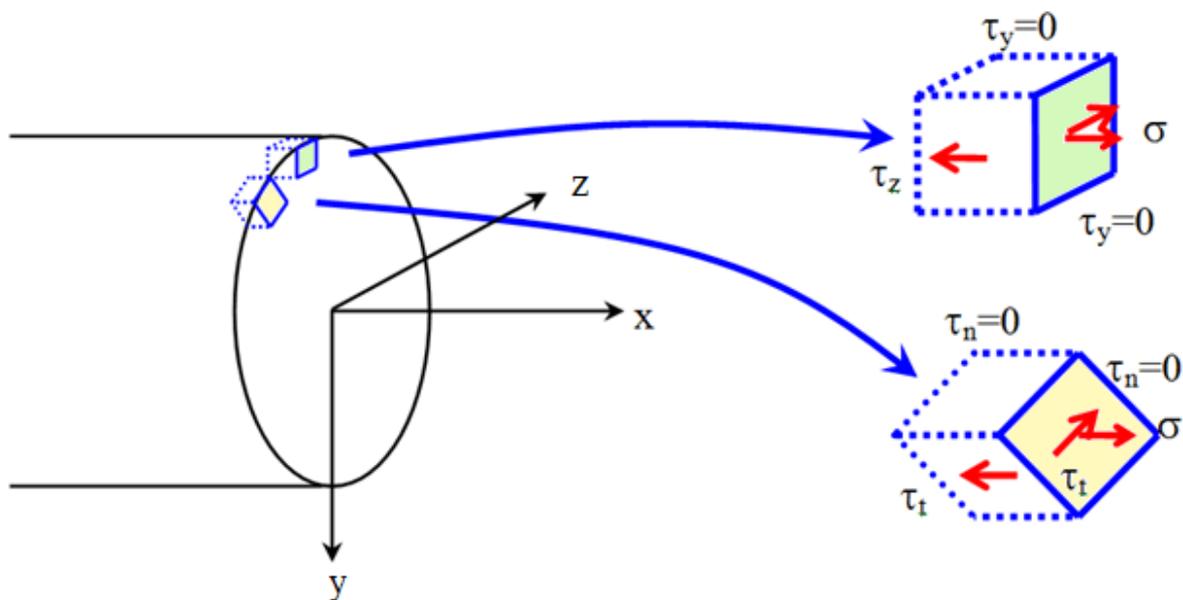
13. Etude de l'effort tranchant dans les sections massives

13.1 Propriétés des contraintes tangentés

La forme du tenseur des contraintes dans une section droite : $(\sigma) = \begin{pmatrix} \sigma & \tau_y & \tau_z \\ \tau_y & 0 & 0 \\ \tau_z & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13.1.1 Contrainte de cisaillement sur le contour

Dans une section droite, en un point du contour extérieur, la contrainte de cisaillement est tangente à ce contour.



13.2 Théorème de la coupure

13.2.1 Hypothèses

1. La poutre est de section constante.
2. Pas de variation de l'effort normal N sur le tronçon de poutre dx .

13.2.2 Notation

Σ_x : section d'abscisse x et G_x son centre de gravité.

(C) : courbe orientée séparant la section Σ_x en deux parties.

Σ_x^+ : partie à gauche de (C) de la section de Σ_x .

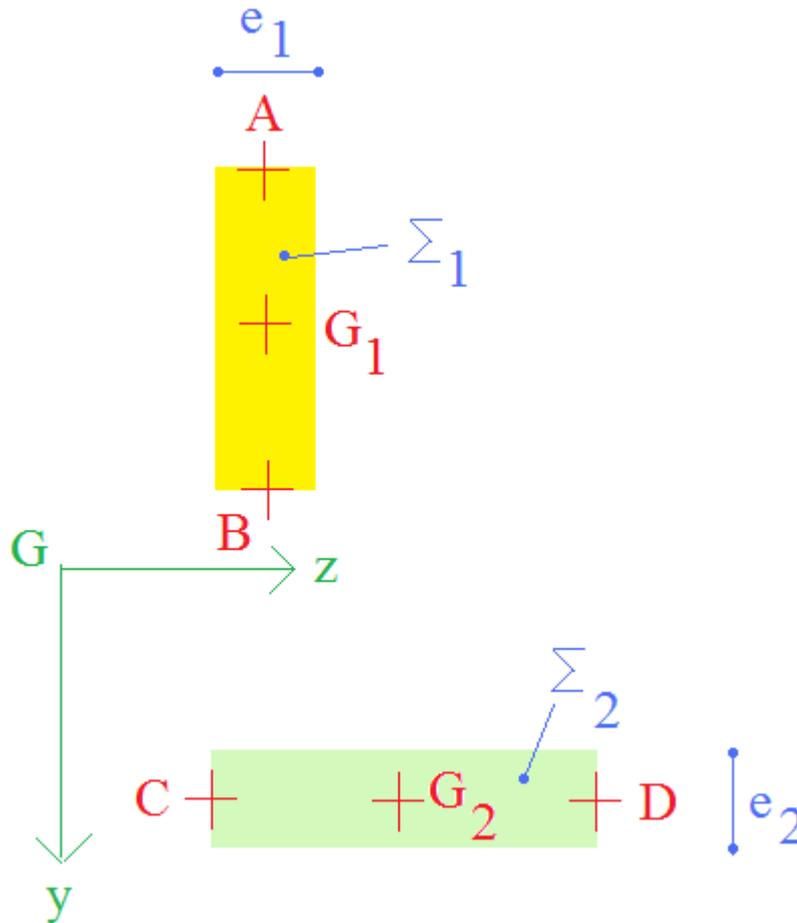
σ_x : contrainte normale σ dans la section Σ_x .

La contrainte tangente se décompose en τ_t tangent à (C) et τ_n perpendiculaire à (C) dirigé vers Σ_x^+ .

Remarque : le trièdre (i, t, n)

- les coordonnées des points milieu des largeurs sont connues
- la largeur est connue

Par exemple, cherchons les moments statiques des surfaces Σ_1 et Σ_2 suivantes :



Surface Σ_1

Le centre de gravité G_1 de la surface Σ_1 a pour coordonnées :

$$y_{G_1} = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_{G_1} = z_A = z_B$$

La surface Σ_1 vaut :

$$S_1 = e_1 \cdot (y_B - y_A)$$

Ainsi les moments statiques valent :

$$S_z(\Sigma_1) = y_{G_1} \cdot S_1 = \frac{y_A + y_B}{2} \cdot e_1 \cdot (y_B - y_A) = \frac{e_1}{2} \cdot (y_B^2 - y_A^2)$$

$$S_y(\Sigma_1) = z_{G_1} \cdot S_1 = z_A \cdot e_1 \cdot (y_B - y_A)$$

Surface Σ_2

Le centre de gravité G_2 de la surface Σ_2 a pour coordonnées :

$$y_{G_2} = y_C = y_D$$

$$z_{G2} = \frac{z_C + z_D}{2}$$

La surface Σ_2 vaut :

$$S_1 = e_2 \cdot (z_D - z_C)$$

Ainsi les moments statiques valent :

$$S_z(\Sigma_2) = y_{G2} \cdot S_1 = y_C \cdot e_2 \cdot (z_D - z_C)$$

$$S_y(\Sigma_2) = z_{G2} \cdot S_1 = \frac{z_C + z_D}{2} \cdot e_2 \cdot (z_D - z_C) = \frac{e_2}{2} \cdot (z_D^2 - z_C^2)$$

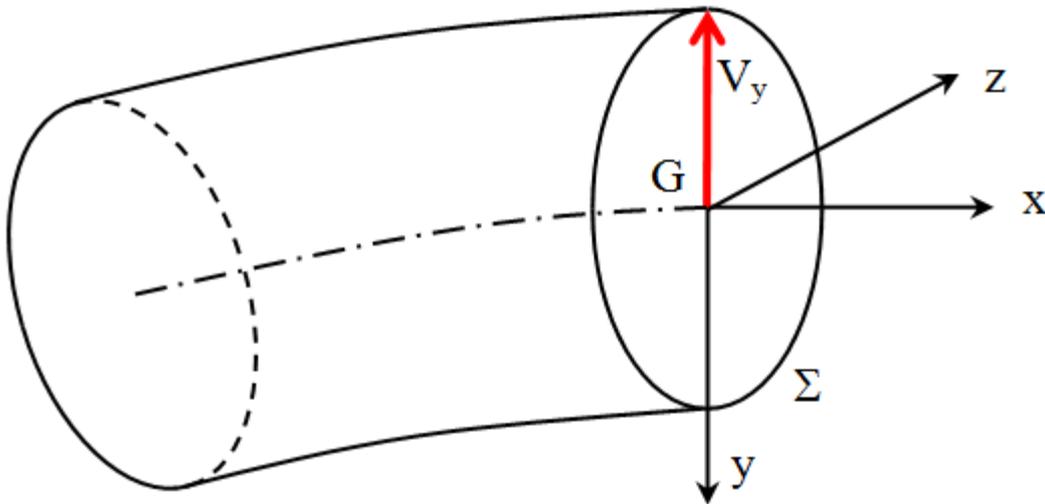
13.3 Conséquence sur une section massive

13.3.1 Définition d'une section massive

Une section massive est une section droite dont aucune dimension définissant la section n'est petite par rapport à d'autres.

13.3.2 Théorie élémentaire

Soit une section droite sollicitée par un effort tranchant V_y :



Hypothèse

Les contraintes tangentées n'ont qu'une composante τ_y se répartissant uniformément sur la

$$\text{section : } \tau_y = -\frac{V_y}{A}$$

Conséquences

La répartition des contraintes de cisaillement est :

Important : Cette théorie élémentaire est en contradiction avec le fait que la contrainte de cisaillement est tangente en tout point du contour de la section.

13.3.3 Théorie RDM

13.3.3.1 Hypothèse

Un effort tranchant V_y (resp. V_z) n'induit que des contraintes tangentes τ_y (resp. τ_z) constantes dans la largeur de la section (resp. la hauteur de la section).

13.3.3.2 Application du théorème de la coupure

On applique le théorème de la coupure à la courbe (C) suivant :

Le théorème de la coupure donne :

$$\int_{(C)} -\tau_y d = -\tau_y b(y) = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+)$$

13.5 Méthode

13.5.1 Logigramme

Phase 1 : on traite uniquement l'effort tranchant V_y

Phase 2 : on fait de même avec l'effort tranchant V_z (en adaptant légèrement...)

14. Etude de l'effort tranchant dans les sections minces symétriques

14.1 Profil mince fermé

14.1.1 Définitions

Définition d'un profil mince

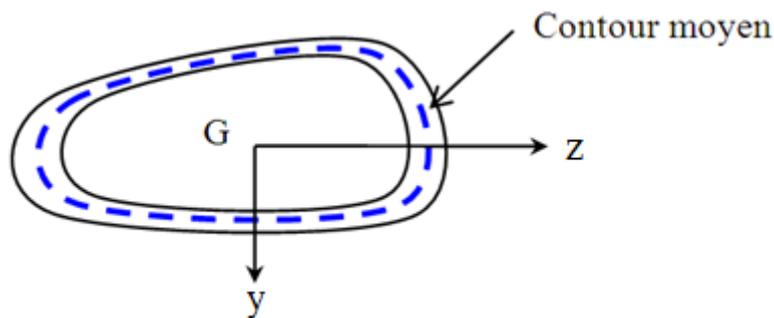
Un profil mince est une section droite à parois mince dont l'épaisseur est petite par rapport aux autres dimensions de la section.

Définition d'un Contour moyen

Le contour moyen d'un profil mince est la courbe définie au milieu de l'épaisseur du profil mince.

Définition d'un profil mince fermé

Un profil mince fermé est un profil mince dont le contour moyen est une courbe fermée.



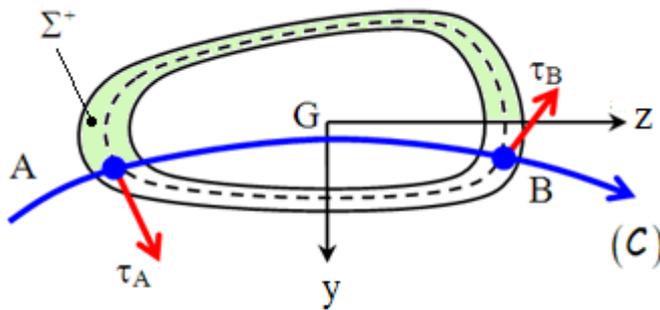
14.1.2 Hypothèses

1. Les contraintes tangentes sont tangentes au contour moyen.
2. Les contraintes tangentes sont constantes dans l'épaisseur du profil.

Les relations entre les contraintes tangentes et les efforts intérieurs imposent

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Sigma} -\tau_y dS = V_y \\ \int_{\Sigma} -\tau_z dS = V_z \\ \int_{\Sigma} (\tau_y z - \tau_z y) dS = 0 \end{array} \right.$$

14.1.3 Application du théorème de la coupure



Remarque : nous prenons comme convention de direction des contraintes tangentés, celle qui fait parcourir un point courant du contour moyen dans le sens trigonométrique.

L'application du théorème de la coupure donne :

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

14.2 Profil mince ouvert

Nous considérons une section, à profil mince ouvert, **symétrique** par rapport à l'axe y , et soumise à un effort tranchant V_y .

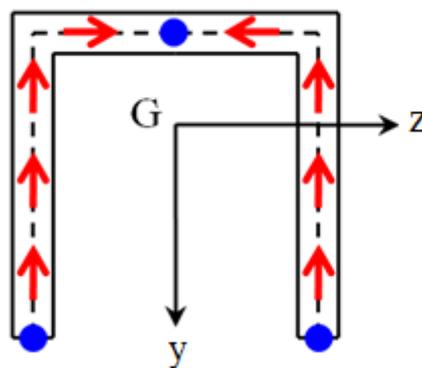
Propriétés

Pour ces sections, la répartition des contraintes est symétrique par rapport à l'axe Gy .

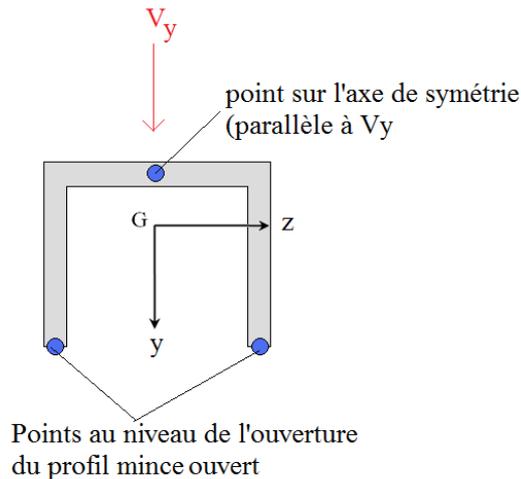
De plus, si l'épaisseur est continue, il en est de même de la répartition des contraintes tangentés le long du contour moyen (le flux de cisaillement devant être continu).

Tous les points du contour moyen appartenant à l'axe de symétrie, auront une contrainte tangente nulle.

Il en est de même au niveau de l'ouverture du profil du fait de la réciprocité du tenseur des contraintes.



Exemple de points où la contrainte de cisaillement est nul pour un profil mince ouvert



14.3 Méthode - Logigramme

Choisir un point B servant de référence tel que le cisaillement soit nul (B appartient à un axe de symétrie parallèle à l'effort tranchant considéré ou se situe au niveau d'une ouverture),

Faire une coupure pour chaque « branche » au niveau d'un point A.
Nota : La partie (AB) constitue la surface (Σ^+).

Calculer le moment statique de la surface (Σ^+) :

- Déterminer l'ordonnée $y_{G\Sigma^+}$ et la profondeur $z_{G\Sigma^+}$ du centre de gravité de la surface (Σ^+)
- Déterminer l'aire S_{Σ^+} de la surface (Σ^+)
- Les moments statiques sont égaux à :

$$S_z(\Sigma^+) = y_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+} \text{ et } S_y(\Sigma^+) = z_{G\Sigma^+} \times S_{\Sigma^+}$$

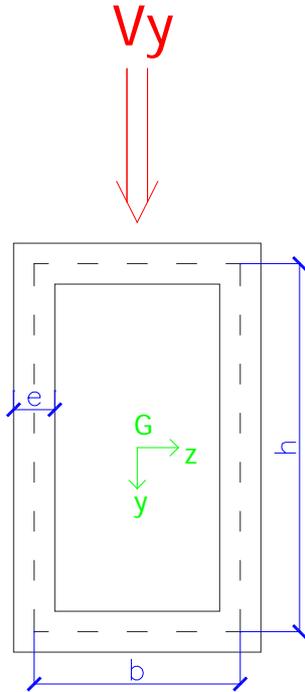
Et finalement, la contrainte de cisaillement est égal à

$$\tau_B e_B - \tau_A e_A = -\frac{V_y}{I_z} S_z(\Sigma^+) - \frac{V_z}{I_y} S_y(\Sigma^+)$$

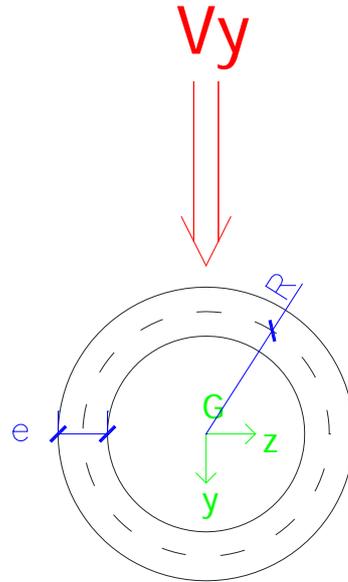
14.4 Exercices

Exercice [15]

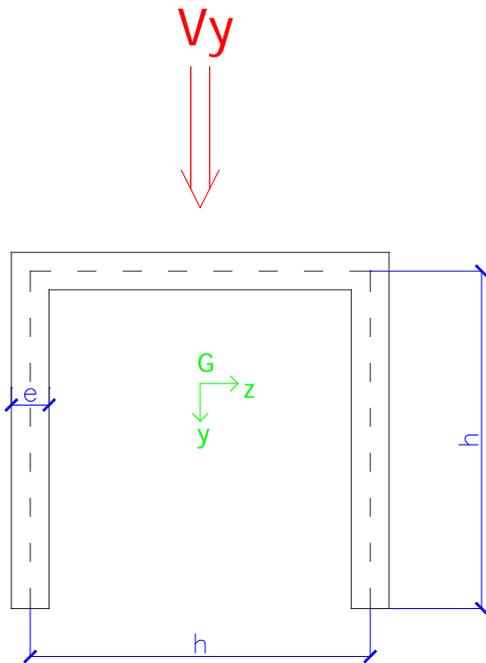
Calculer les contraintes tangentes (en donnant les diagrammes de contrainte) dues à l'effort tranchant V_y .



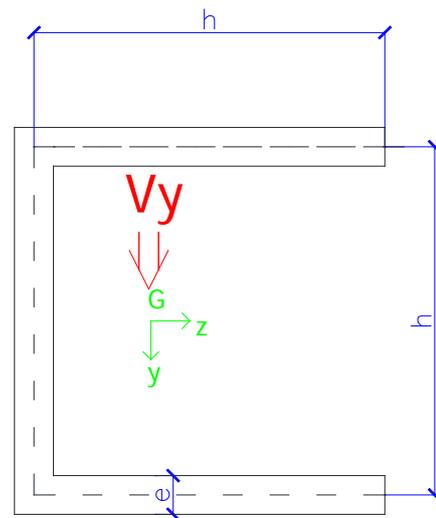
a)



b)



c)

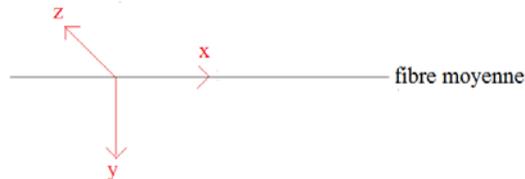


d)

15. Etude de la torsion

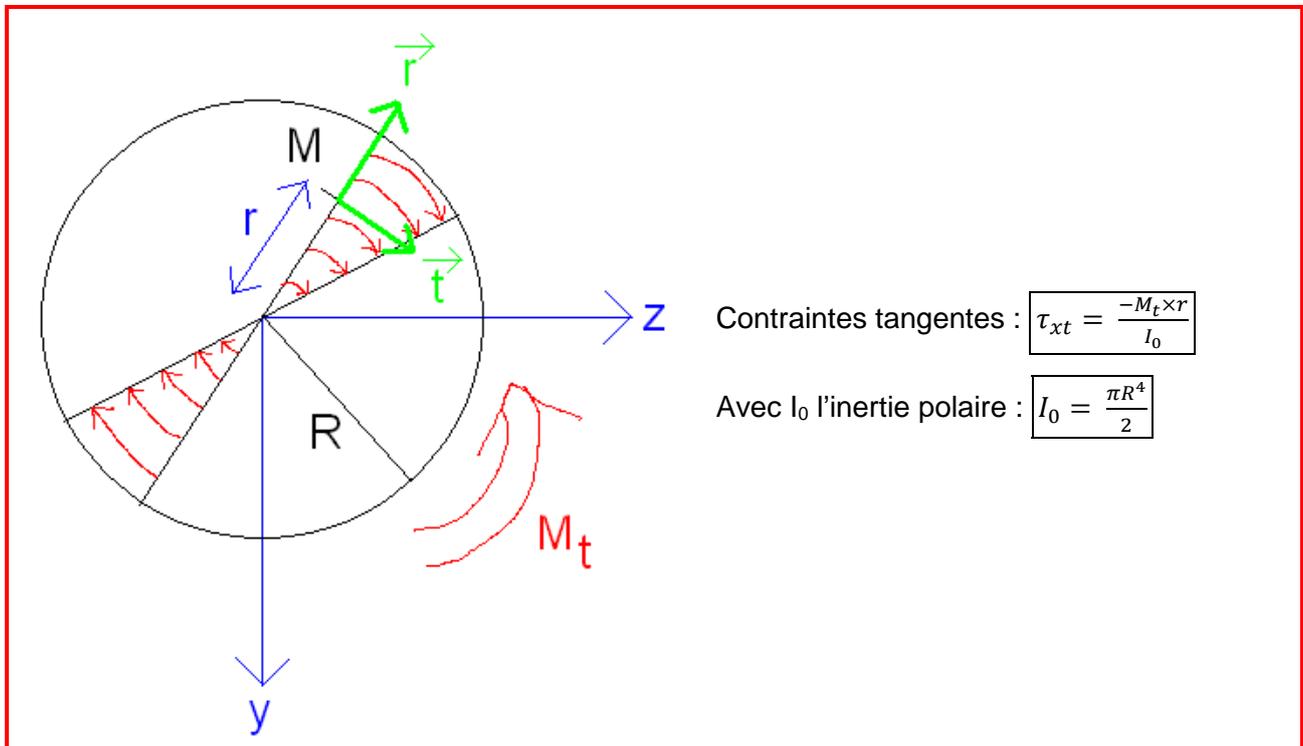
Notation :

Le moment de torsion s'écrit M_t ou M_x dans le torseur $\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix}$ avec le repère :

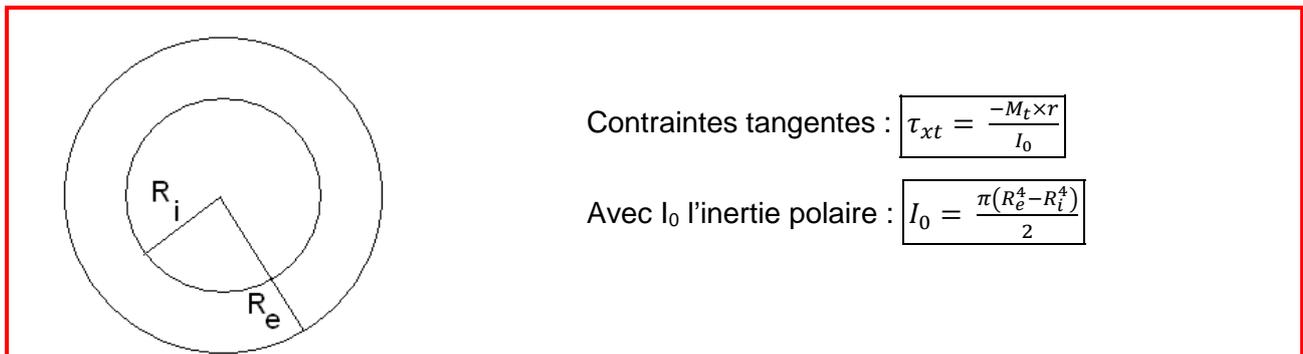


15.1 Section circulaire

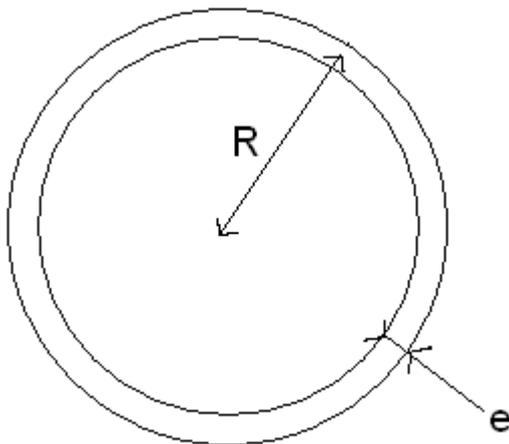
15.1.1 Section pleine



15.1.2 Tube épais



15.1.3 Tube mince

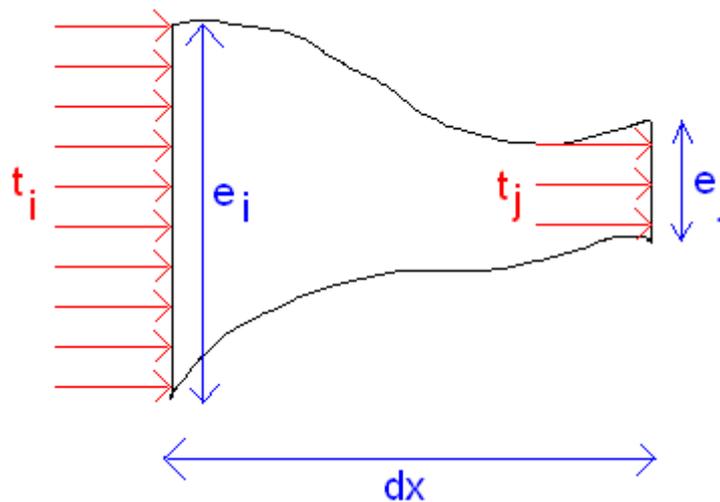


Contraintes tangentés : $\tau_{xt} = \frac{-M_t \times R}{I_0}$

Avec I_0 l'inertie polaire : $I_0 = 2\pi R^3 e$

15.2 Profil mince fermé

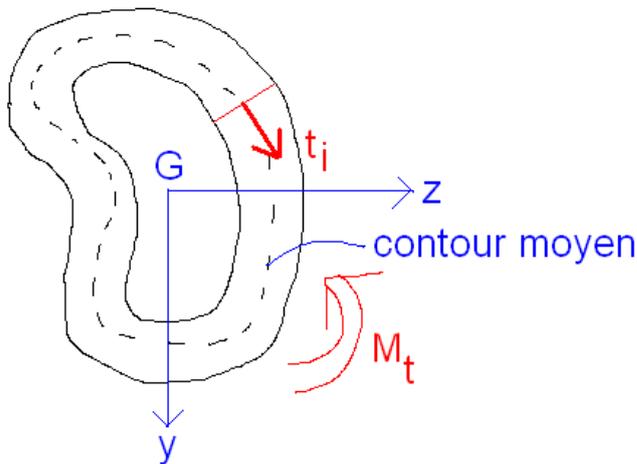
15.2.1 Propriété du flux du cisaillement



$$t_i \cdot e_i = t_j \cdot e_j$$

D'où : $\forall i ; t_i \times e_i = \text{constante}$

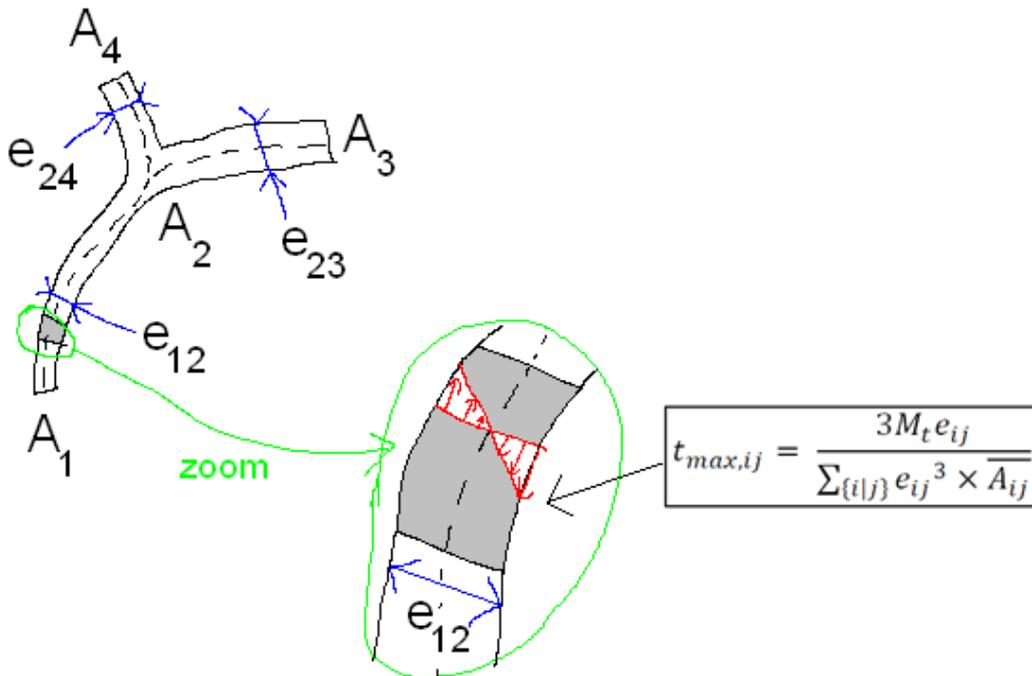
15.2.2 Calcul des contraintes dans un profil mince fermé



$$t_i = \frac{-M_t}{e_i \times 2 \Sigma_{int}}$$

Avec Σ_{int} l'aire à l'intérieur du contour moyen.

15.3 Profile mince ouvert



Pour le zoom $\begin{cases} e_{ij} = e_{12} \\ \overline{A_{ij}} : \text{longueur du contour moyen entre } A_i \text{ et } A_j \end{cases}$

$$\Rightarrow t_{max,12} = \frac{3M_t e_{12}}{e_{12}^3 \times \overline{A_{12}} + e_{23}^3 \times \overline{A_{23}} + e_{24}^3 \times \overline{A_{24}}}$$

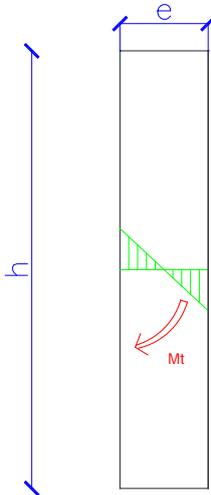
15.4 Section massive quelconque

Hors programme (Analogie de l'équilibre de la membrane)

15.5 Exercices

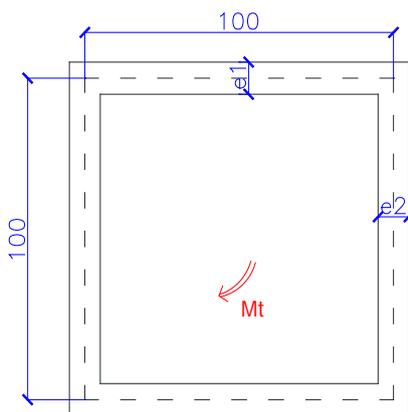
Exercice [16]

Rectangle infiniment grand



Calculer la contrainte tangentielle maximale τ_{\max} due au moment de torsion M_t en tenant compte que $e \ll h$.

Exercice [17]

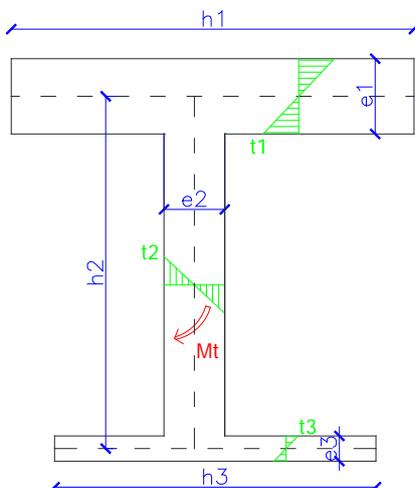


Données : $e_1 = e_2 = 10$ mm, $M_t = 50$ N.m

Les côtes de la section, en mm, sont :

- 1) Calculer la contrainte tangentielle maximale τ_{\max} due au moment de torsion M_t
- 2) Calculer la contrainte tangentielle maximale τ_{\max} due au moment de torsion M_t avec $e_2 = 5$ mm

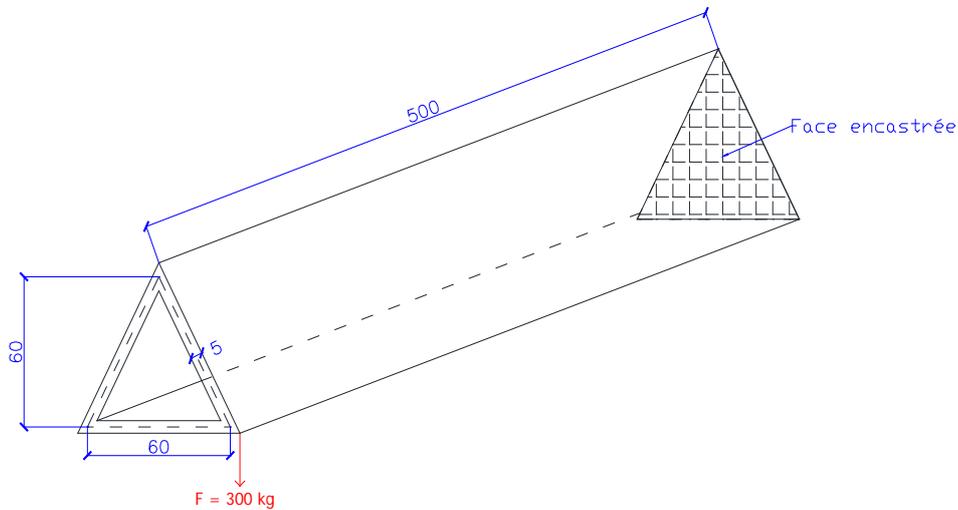
Exercice [18]



Déterminer t_1 , t_2 et t_3 qui sont les contraintes tangentielles maximales dues au moment de torsion M_t dans les branches 1,2 et 3 de la section suivante :

Exercice [19]

Les côtes de la poutre sont en cm :



Données :

- Pour un triangle plein de hauteur h et de base b , l'inertie est : $I_z = \frac{bh^3}{36}$
- Les axes sont pris selon la convention de la RDM

Pour la section centrale ($x = 2,5$ m), calculer :

- les contraintes normales
- les contraintes tangentielles de torsion

Exercice [20]

Deux arbres cylindriques de section constante sont sollicités en torsion pure par le même couple de torsion.

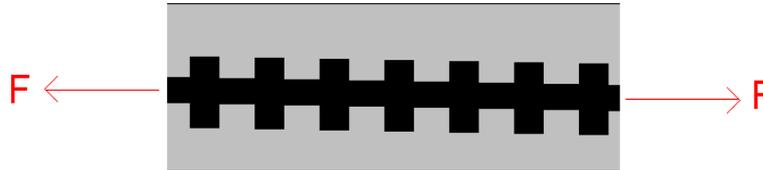
- Le premier arbre est plein de diamètre D_1
- Le deuxième arbre est tubulaire de diamètre extérieur D_2 et de diamètre intérieur $0,7D_2$.

La contrainte maximale de torsion est la même pour chacun de ces deux arbres.

En sachant qu'ils sont de même longueur et fabriqués dans le même matériau, quel est le rapport de masse entre les deux arbres ?

16. Principe de la précontrainte

16.1 Généralités



Précontrainte = compression ajoutée dans le matériau (précontrainte interne) ou extérieure à la section (cas de réhabilitation de pont ou de bâtiment par exemple).

Remarque : l'objectif de ce chapitre n'est pas de faire un cours sur la précontrainte, mais uniquement de savoir calculer les contraintes normales induites.

16.2 Modélisation

16.2.1 Nature de la force considérée

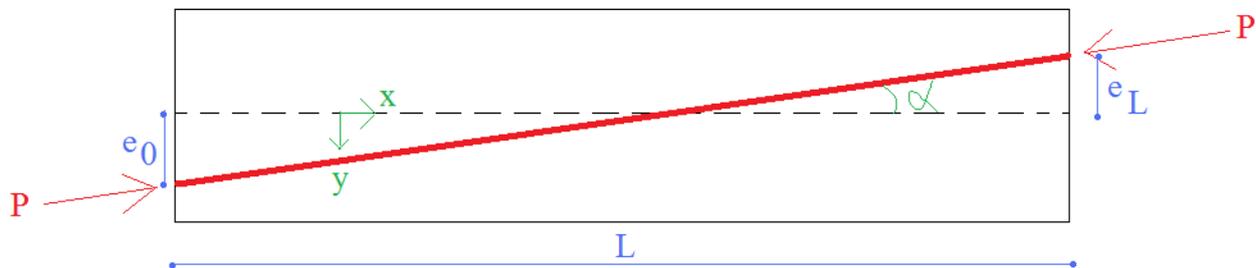
Il est commode de considérer la force interne à la section et de réaliser l'équilibre

16.2.2 Exemple

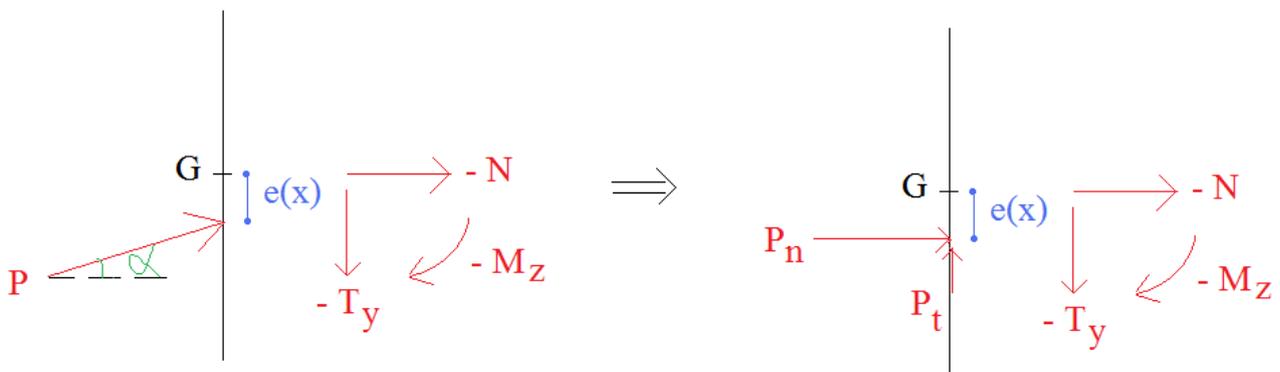
On considère un câble avec une force de précontrainte P faisant un angle α par rapport à la fibre moyenne.

L'excentricité du câble à l'origine vaut e_0 et l'excentricité à l'extrémité vaut e_L .

ATTENTION : l'excentricité a un signe, dans l'exemple $e_0 > 0$ et $e_L < 0$ (puisque l'axe \vec{y} du repère local est dirigé vers le bas).



A une abscisse x donnée, l'équilibre de la section est modélisée par :



L'excentrement $e(x)$ est une fonction affine de type $a \cdot x + b$ avec :

$$\begin{cases} e(0) = e_0 = a \cdot 0 + b \\ e(L) = e_L = a \cdot L + b \end{cases}$$

Ainsi, l'excentrement en fonction de x vaut :

$$e(x) = \frac{e_L - e_0}{L} \cdot x + e_0$$

L'angle α peut être calculé par :

$$\tan \alpha = \frac{e_L - e_0}{L}$$

Attention : l'excentricité a un signe qu'il convient de respecter.

P_n et P_t sont les composantes de P selon les axes \vec{x} et \vec{y} et valent :

$$\begin{cases} P_n = P \cdot \cos \alpha \\ P_t = P \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

Ce travail préliminaire réalisé, il reste à calculer l'équilibre pour connaître le torseur induit de la précontrainte :

Equilibre selon l'axe \vec{x} :

$$-N + P_n = 0 \Leftrightarrow N = P_n$$

Equilibre selon l'axe \vec{y} :

$$-T_y - P_t = 0 \Leftrightarrow T_y = -P_t$$

Equilibre du moment autour de l'axe \vec{z} :

$$-M_z - e(x) \cdot P_n = 0 \Leftrightarrow M_z = -e(x) \cdot P_n$$

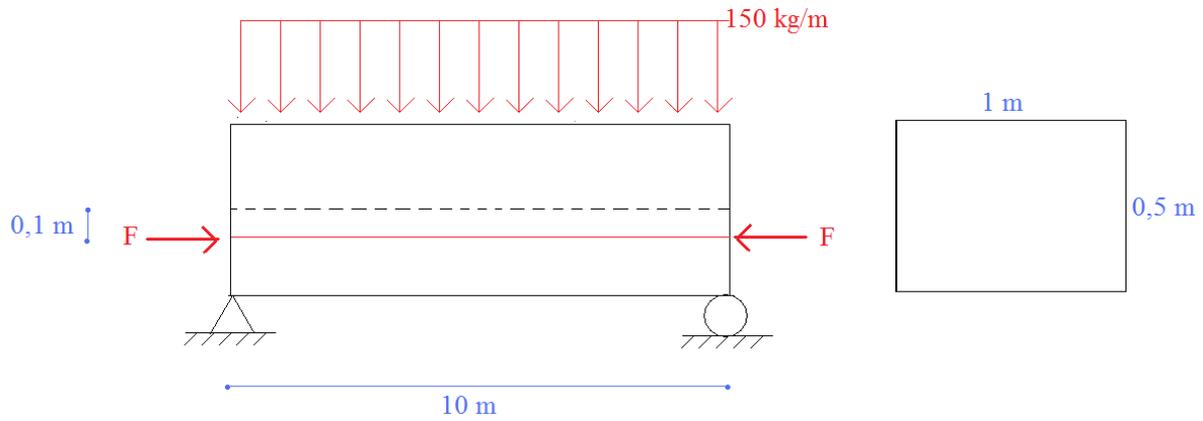
Puis la répartition des contraintes normales se calcule avec le torseur suivant :

$$\begin{cases} N = P_n \\ M_z = -e(x) \cdot P_n \end{cases}$$

Et la répartition des contraintes tangentes se calcule avec l'effort tranchant $T_y = -P_t$

16.3 Exercice

Exercice [21]



Dimensionner la précontrainte F à appliquer à la poutre pour éviter toute traction dans la poutre.