

RDM 1ère année ENTPE
Résistance des matériaux – partie 1
Corrections des exercices

Boris TEDOLDI
Ingénieur structure



Calcul Structure Bâtiment

2 chemin des maisonnettes BP19
39150 SAINT LAURENT EN GDX

<http://www.csb.bet>

1. Rappels de MMC utiles en RDM	4
1.1 Réponse exercice [1].....	4
1.2 Réponse exercice [2].....	6
1.3 Réponse exercice [3].....	7
1.4 Réponse exercice [4].....	8
1.5 Réponse exercice [5].....	9
1.6 Réponse exercice [6].....	9
1.7 Réponse exercice [7].....	10
1.8 Réponse exercice [8].....	11
3. Définitions	12
3.1 Réponse exercice [9].....	12
4. Hypothèses du cours de R.D.M.	13
4.1 Réponse exercice [10].....	13
4.2 Réponse exercice [11].....	15
5. Calculs des réactions d'appuis	16
5.1 Réponse exercice [12].....	16
5.2 Réponse exercice [13].....	18
5.3 Réponse exercice [14].....	19
5.4 Réponse exercice [15].....	20
6. Calculs des diagrammes de sollicitations	22
6.1 Réponse exercice [16].....	22
6.2 Réponse exercice [17].....	23
6.3 Réponse exercice [18].....	25
6.4 Réponse exercice [19].....	26
6.5 Réponse exercice [20].....	26
6.6 Réponse exercice [21].....	27
6.7 Réponse exercice [22].....	29
6.8 Réponse exercice [23].....	31
6.9 Réponse exercice [24].....	34
6.10 Réponse exercice [25].....	37
6.11 Réponse exercice [26].....	41
6.12 Réponse exercice [27].....	44

6.13	Réponse exercice [28]	47
6.14	Réponse exercice [29]	48
6.15	Réponse exercice [30]	48
6.16	Réponse exercice [31]	50
7.	Tracé direct des diagrammes de sollicitations	51
7.1	Réponse exercice [32]	51
7.2	Réponse exercice [33]	54
7.3	Réponse exercice [34]	57
7.4	Réponse exercice [35]	59
7.5	Réponse exercice [36]	61
7.6	Réponse exercice [37]	65
8.	Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité.....	72
8.1	Réponse exercice [38]	72
9.	Caractéristiques des sections droites	74
9.1	Réponse exercice [39]	74
9.2	Réponse exercice [40]	77
9.3	Réponse exercice [41]	82
9.4	Réponse exercice [42]	88
9.5	Réponse exercice [43]	88
9.6	Réponse exercice [44]	91
9.7	Réponse exercice [45]	92
9.8	Réponse exercice [46]	92
9.9	Réponse exercice [47]	92
9.10	Réponse exercice [48]	92
9.11	Réponse exercice [49]	93
9.12	Réponse exercice [50]	93

1. Rappels de MMC utiles en RDM

1.1 Réponse exercice [1]

Pour répondre aux questions, il est nécessaire de connaître l'équation de la loi de comportement.
Après analyse :

$$\begin{cases} \varepsilon \leq 1\% \rightarrow \sigma = 5\varepsilon \\ 1\% \leq \varepsilon \leq 5\% \rightarrow \sigma \approx 0,0625\varepsilon + 4,938 \end{cases}$$

Avec $\begin{cases} \varepsilon \text{ sans unité et en \%} \\ \sigma \text{ en MPa} \end{cases}$

1a)

En fonction du poids de la masse P et de la section du barreau S, la contrainte dans le barreau

est : $\sigma = \frac{P}{S}$

Or $S = \frac{\pi \times 0,01^2}{4}$

Et $P = 20 \times 10 = 200 \text{ N}$

Ainsi

$$\sigma = \frac{200 \times 4}{\pi \times 0,01^2} = 2,5 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leftrightarrow 2,5 \text{ MPa}$$

D'après l'équation de la loi de comportement : $\varepsilon \leq 1\% \rightarrow \sigma = 5\varepsilon$

Donc $\varepsilon = 0,5\%$

b) Par définition $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$

$$\Delta l = \varepsilon \times l = \frac{0,5}{100} \times 2 = 0,01 \text{ m} \leftrightarrow 1 \text{ cm}$$

2)

D'après la loi de comportement, la contrainte maximale à la limite élastique est :

$$\sigma_{max,elastique} = 5 \text{ MPa} \leftrightarrow 5 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Ce qui correspond à la force

$$P_{max,elastique} = \sigma_{max,elastique} \times S = 5 \cdot 10^6 \times \frac{\pi \times 0,01^2}{4} = 393 \text{ N}$$

D'où une masse de $39,3 \text{ kg}$.

3a)

$$P = 40 \times 10 = 400 \text{ N}$$

$$\sigma = \frac{P}{S} = \frac{400 \times 4}{\pi \times 0,01^2} = 5,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \leftrightarrow 5,1 \text{ MPa}$$

D'après l'équation de la loi de comportement : $1\% \leq \varepsilon \leq 5\% \rightarrow \sigma \approx 0,0625\varepsilon + 4,938$

Donc

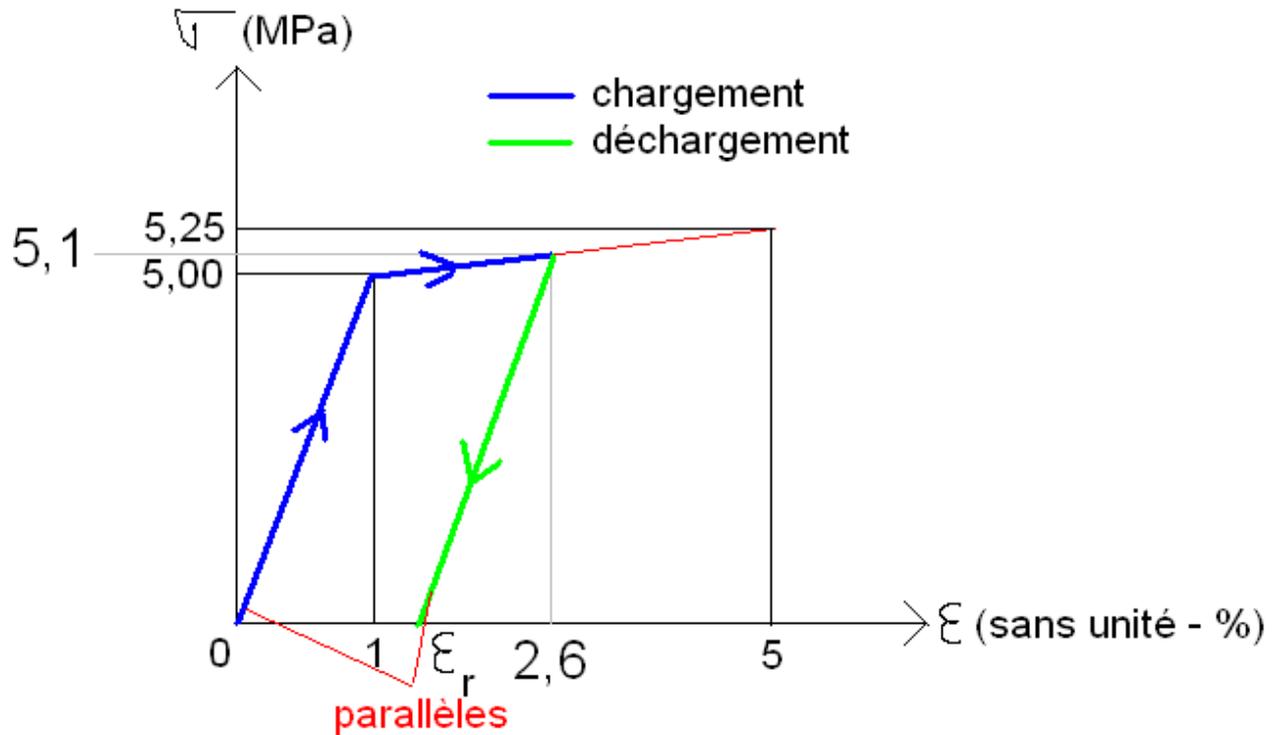
$$\varepsilon = \frac{5,1 - 4,938}{0,0625} = 2,6\%$$

b)

$$\Delta l = \varepsilon \times l = \frac{2,6}{100} \times 2 = 0,052 \text{ m} \leftrightarrow 5,2 \text{ cm}$$

c)

De manière idéalisée, le déchargement s'effectue parallèlement au chargement élastique.



Ainsi, les triangles rectangles d'hypothénuse bleue et verte sont homothétiques :

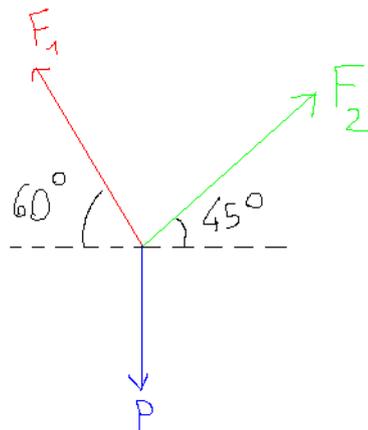
$$\frac{5}{1} = \frac{5,1}{2,6 - \epsilon_r} \Leftrightarrow \epsilon_r \approx 1,6 \%$$

Donc

$$\Delta l_r = \epsilon_r \times l = \frac{1,6}{100} \times 2 = 0,032 \text{ m} \Leftrightarrow 3,2 \text{ cm}$$

Après déchargement de la masse de 40 kg, le barreau conserve un allongement définitif de 3,2cm, ainsi sa longueur devient égale à 203,2 cm.

1.2 Réponse exercice [2]



a) Equilibre des forces

$$\begin{cases} F_1 \sin(60) + F_2 \sin(45) = P \\ F_1 \cos(60) = F_2 \cos(45) \end{cases}$$

$$m = 600 \text{ kg} \Rightarrow P = 6 \text{ kN}$$

Après calculs, $\begin{cases} F_1 = 4,39 \text{ kN} \\ F_2 = 3,11 \text{ kN} \end{cases}$

$$S_1 = \frac{\pi \times d_1^2}{4} \text{ et } \sigma_1 = \frac{F_1}{S_1} = \frac{4,39 \times 4}{\pi \times (6 \cdot 10^{-3})^2} = 155\,264 \text{ kPa}$$

$$S_2 = \frac{\pi \times d_2^2}{4} \text{ et } \sigma_2 = \frac{3,11 \times 4}{\pi \times (5 \cdot 10^{-3})^2} = 158\,391 \text{ kPa}$$

b). Le câble 2 a la contrainte la plus importante.

• $280 \text{ MPa} \leftrightarrow 280\,000 \text{ kPa}$

Masse (kg)	Contrainte (kPa)
600	158 391
m	280 000

$$m = \frac{280\,000 \times 600}{158\,391}$$

Donc

$$m \approx 1061 \text{ kg}$$

1.3 Réponse exercice [3]

a) Coupure cylindre 0,6 m

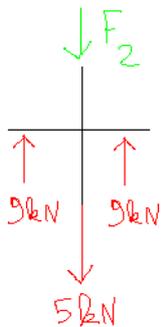


$$F_1 + 5 = 0 \Rightarrow F_1 = -5 \text{ kN}$$

$$S_1 = 200 \text{ mm}^2 \Rightarrow |\sigma_1| = \frac{5}{200 \cdot (10^{-3})^2} = 25000 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\sigma_2| = 25 \text{ MPa}}$$

b) Coupure cylindre 1,2 m

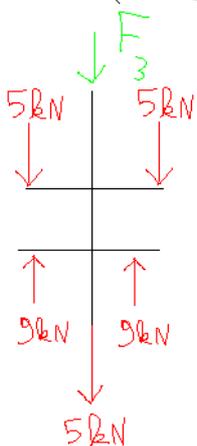


$$F_2 + 5 - 18 = 0 \Rightarrow F_2 = 13 \text{ kN}$$

$$\sigma_2 = \frac{F_2}{S_2} = \frac{13}{300 \times (10^{-3})^2} = 43333 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_2 = 43,3 \text{ MPa}}$$

c) Coupure cylindre 0,9 m



$$F_3 + 10 - 18 + 5 = 0 \Rightarrow F_3 = 3 \text{ kN}$$

$$\sigma_3 = \frac{F_3}{S_3} = \frac{3}{150 \times (10^{-3})^2} = 20000 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_3 = 20 \text{ MPa}}$$

1.4 Réponse exercice [4]

$$a) \theta = 30^\circ \Rightarrow \Delta l = \frac{30}{360} \times 2,5 = 0,208 \text{ mm}$$

$$\text{La déformation est } \varepsilon = \frac{0,208}{160} = 0,130\%$$

Contrainte mécanique

$$\sigma_{mt} = \frac{0,130}{100} \times 105 \cdot 10^9 = 137 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

Contrainte thermique

$$\text{La déformation thermique est } \varepsilon_{tt} = 10 \cdot 10^{-6} \Delta T$$

$$\sigma_{tt} = 10 \cdot 10^{-6} \Delta T \times 105 \times 10^9 = 1,05 \cdot 10^6 \cdot \Delta T \text{ Pa}$$

Contrainte totale

$$\sigma_t = 137 + 1,05 \Delta T \quad (\text{en MPa})$$

b) Limitation dans le tube

$$137 + 1,05 \Delta T \leq 140$$

$$\Rightarrow \Delta T \leq 2,9^\circ \text{C}$$

Bilan

L'augmentation maximale de température est de $2,9^\circ \text{C}$

1.5 Réponse exercice [5]

La force P est reprise par 6 boulons (3 de chaque côté)

Chaque boulon doit reprendre 6 kN.

La surface de chaque boulon est $S = \frac{\pi \times (12 \cdot 10^{-3})^2}{4}$

$$\text{Donc } \sigma_{\text{moyen}} = \frac{6 \times 4}{\pi \times (12 \cdot 10^{-3})^2} = 55100 \text{ kPa} \Rightarrow \sigma_{\text{moyen}} = 55,1 \text{ MPa}$$

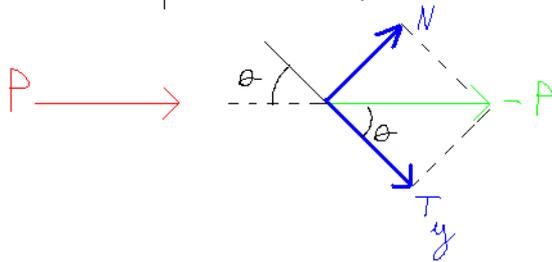
1.6 Réponse exercice [6]

$$\begin{cases} \sigma_x = -15 \\ \sigma_y = 25 \\ \sigma_z = -12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \tau_{yx} = 0 \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = -8 \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} = 6 \end{cases}$$

1.7 Réponse exercice [7]

a) L'équilibre des forces est:



En vertical, N "compense" T_y
donc $N \cos \theta = T_y \sin \theta$

$$\text{d'où } \frac{N}{T_y} = \tan \theta \leq 0,2$$

$$\Rightarrow \theta \leq 11,3^\circ$$

b) L'équilibre horizontal est

$$T_y \cos \theta + N \sin \theta = P \quad \text{or } N = 0,2 T_y$$

$$\text{Donc } T_y \cos(11,3) + 0,2 T_y \sin(11,3) = 7,8$$

$$\Rightarrow T_y = 7,65 \text{ kN}$$

• La surface de collage est égale à $S = 40 \cdot 10^{-3} \times \frac{60 \cdot 10^{-3}}{\sin(11,3)}$

• $\bar{\sigma}_{\text{moy}} = \frac{T_y}{S} \Rightarrow \bar{\sigma}_{\text{moy}} = 625 \text{ kPa}$

• $\bar{\tau}_{\text{moy}} = \frac{N}{S} = \frac{0,2 T_y}{S} = 0,2 \bar{\sigma}_{\text{moy}} \Rightarrow \bar{\tau}_{\text{moy}} = 125 \text{ kPa}$

1.8 Réponse exercice [8]

Forces reprises par les appuis

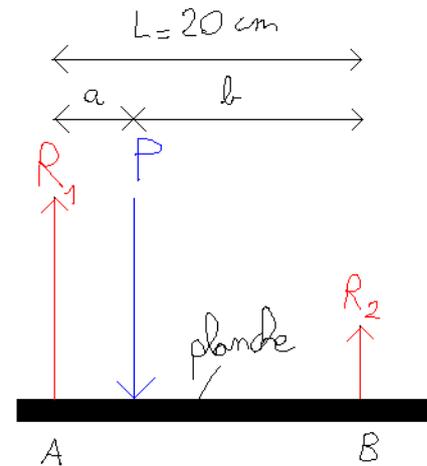
- Le problème peut se modéliser par le schéma suivant
- Equilibre des forces

$$R_1 + R_2 - P = 0$$

- Moment nul en A

$$P a - L R_2 = 0$$

- La résolution donne
- $$\begin{cases} R_1 = \frac{b \cdot P}{L} \\ R_2 = \frac{a \cdot P}{L} \end{cases}$$



Résolution de l'exercice

- La planche reste horizontale si le raccourcissement des appuis est identique, c'est à dire que $\Delta L_1 = \Delta L_2$.

- La contrainte dans l'appui 1 est $\sigma_1 = \frac{R_1}{A_1} = \epsilon_1 E_1 = \frac{\Delta L_1}{L_1} \times E_1$

$$\text{Donc } \Delta L_1 = \frac{R_1 L_1}{A_1 E_1} = \frac{b \cdot P L_1}{A_1 E_1 L}$$

- De même $\Delta L_2 = \frac{a P L_2}{A_2 E_2 L}$, donc $\Delta L_1 = \Delta L_2$
- $$\Leftrightarrow \frac{a L_2}{A_2 E_2} = \frac{b L_1}{A_1 E_1} = \frac{(L-a) L_1}{A_1 E_1}$$

a) $L_1 = L_2 = 50 \text{ cm}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 16,7 \text{ cm} \\ b = 3,3 \text{ cm} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} L_1 = 50 \text{ cm} \\ L_2 = 75 \text{ cm} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a = 15,4 \text{ cm} \\ b = 4,6 \text{ cm} \end{cases}$$

3. Définitions

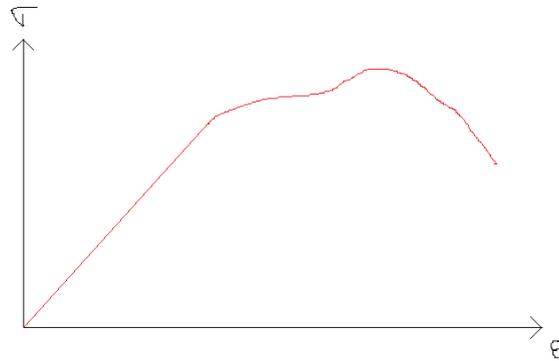
3.1 Réponse exercice [9]

- 1) La ligne (CF) est la fibre moyenne
- 2) La ligne (BE) est la fibre supérieure (attention au sens du vecteur \vec{y})
- 3) La ligne (AD) est la fibre inférieure
- 4) Il s'agit de la fibre inférieure donc les points de la ligne (AD).
- 5) Il s'agit de la fibre inférieure donc les points de la ligne (AD).

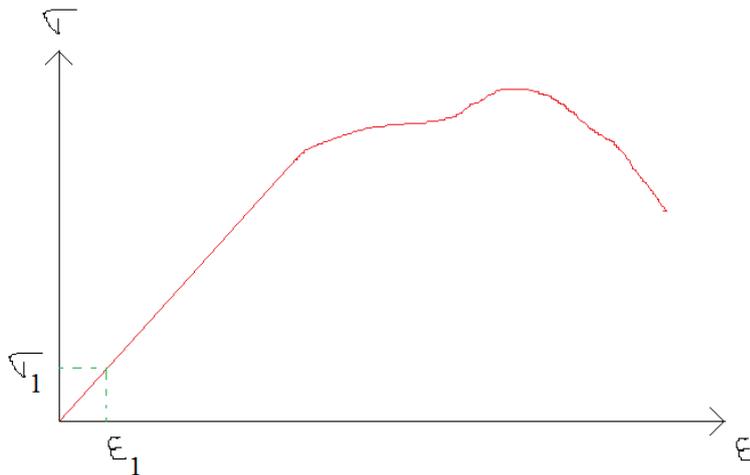
4. Hypothèses du cours de R.D.M.

4.1 Réponse exercice [10]

En supposant la loi de comportement réaliste du matériau suivante :



En supposant que la force F_1 induit la déformation ε_1 , la contrainte σ_1 vaut :

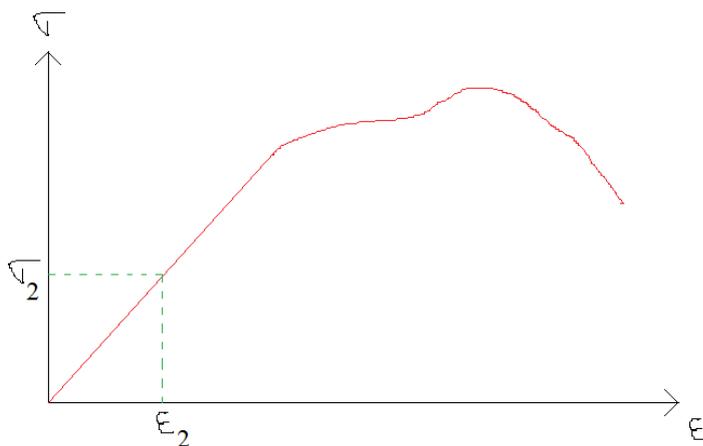


La loi de Hooke donne :

$$\sigma_1 = \varepsilon_1 \times E$$

Avec E le module de Young du Matériau

En supposant que la force F_2 induit la déformation ε_2 , la contrainte σ_2 vaut :

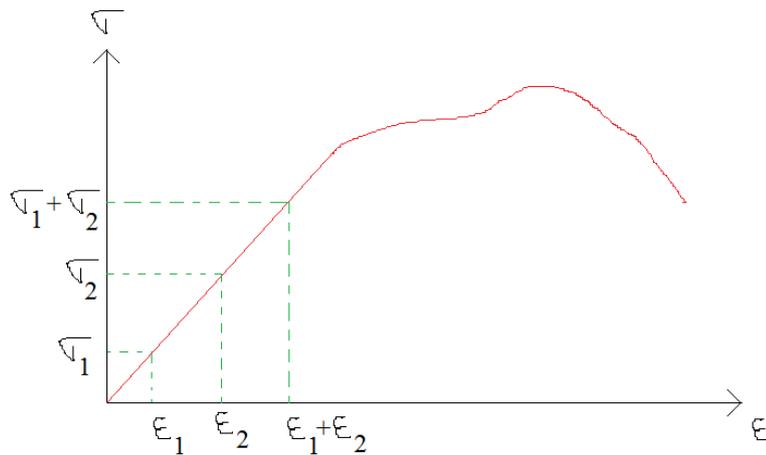


La loi de Hooke donne :

$$\sigma_2 = \varepsilon_2 \times E$$

Avec E le module de Young du Matériau

Ainsi, l'effet conjugué de F_1 et de F_2 produit une déformation égale à $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, et la contrainte est :



La loi de Hooke donne :

$$\begin{aligned}\sigma &= (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \times E \\ &= \varepsilon_1 \times E + \varepsilon_2 \times E \\ &= \sigma_1 + \sigma_2\end{aligned}$$

Avec E le module de Young du Matériau

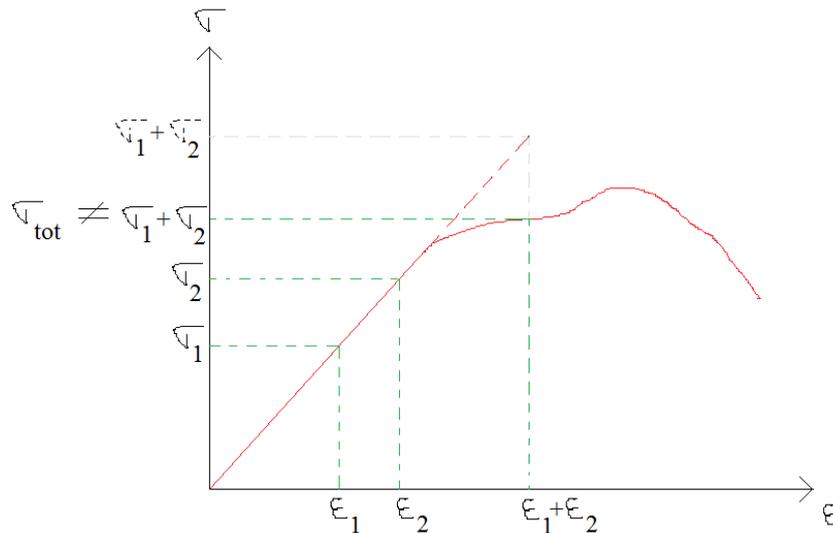
L'effet conjugué des forces F_1 et F_2 produit une contrainte égale à $\sigma_1 + \sigma_2$.

Nota : Cette propriété s'appelle le **principe de superposition**.

Remarque :

Ce résultat n'est vrai que parce que le comportement du matériau est linéaire (loi de Hooke) car la structure justifie l'hypothèse des transformations infinitésimales (en particulier les petites déformations dans notre exemple).

En effet, si l'hypothèse des transformations infinitésimales n'était pas respectée, on aurait :



La phrase n'est donc correcte que dans le domaine de validité de la R.D.M..

4.2 Réponse exercice [11]

	Homogène	Isotrope	Linéaire ^{b)}	Elastique ^{b)}
Béton	OUI ^{a)}	OUI	OUI	OUI
Béton armé	NON ^{c)}	NON ^{e)}	OUI	OUI
Acier	OUI	OUI	OUI	OUI
Bois massif	NON ^{d)}	NON ^{f)}	OUI	OUI
Verre	OUI	OUI	OUI	OUI

- a) En toute rigueur, la réponse est non car la présence de granulats par exemple dans sa composition rend ce matériau non homogène. Cependant, seul le comportement macroscopique est regardé donc le béton a un comportement relativement homogène.
- b) En tenant compte de l'hypothèse des transformations infinitésimales, sinon la réponse est non pour tous les matériaux
- c) La nappe d'acier supprime l'homogénéité du matériau
- d) Présence de nœud par exemple. Pour un bois de bonne qualité, comme pour le béton, la réponse qui peut être correcte puisque le comportement d'un point de vue macroscopique peut être vu comme homogène.
- e) Les nappes d'aciers sont orthotropes et n'ont pas les mêmes caractéristiques dans toutes les directions.
- f) La direction des veines du bois est responsable de différence de résistance entre direction

Remarque : ces réponses sont générales. Certains bois par exemple peuvent présenter des caractéristiques différentes.

5. Calculs des réactions d'appuis

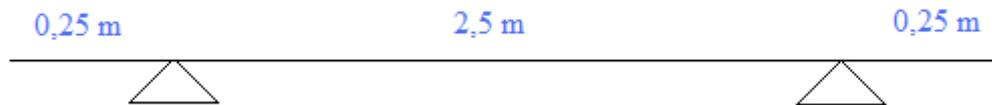
5.1 Réponse exercice [12]

a) Conditions d'appuis

Les conditions d'appuis sont des appuis simples :

- la poutre peut glisser horizontalement,
- la poutre peut pivoter au niveau des appuis
- mais ne peut se déplacer verticalement.

Ainsi d'après les données de l'énoncé, cela se traduit par :



b) Chargements

Poids propre de la poutre g_{poutre} :

La poutre a un volume égal à : $3 \times \frac{\pi \times 0,15^2}{4} = 5,3 \cdot 10^{-2} m^3$

La masse volumique, n'étant pas connue exactement, doit être maximisée afin d'être dans le sens de la sécurité. Ainsi pour le calcul $\rho = 1200 \text{ kg/m}^3$ est pris en compte.

Le poids propre de la poutre est alors égal à : $5,3 \cdot 10^{-2} \times 1200 \approx 64 \text{ kg}$

Généralement, les charges réparties sont données par mètre linéaire, ainsi :

$$g_{poutre} = \frac{64}{3} \approx 21,3 \text{ kg/m}$$

Poids propre des chaînes et du banc G_{banc} :

Le poids propre des chaînes et du banc est modélisé par 2 forces ponctuelles situées à 30 cm des appuis. Le poids propre étant égal à 25 kg, les deux forces ponctuelles ont pour valeur 12,5 kg chacune.

Poids de la neige sur le banc $Q_{neige,banc}$:

La surface du banc est égale à $1,2 \text{ m}^2$. La masse volumique de la neige, n'étant pas connue exactement, doit être maximisée afin d'être dans le sens de la sécurité. Ainsi pour le calcul $\rho_{neige} = 150 \text{ kg/m}^3$ est pris en compte.

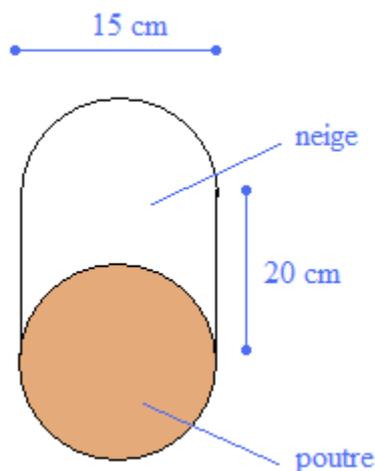
La hauteur de chute de neige est égale à $0,2 \text{ m}$

Le poids propre de la neige sur le banc est alors égal à : $0,2 \times 1,2 \times 150 = 36 \text{ kg}$

Le poids propre étant égal à 36 kg, les deux forces ponctuelles ont pour valeur 18 kg chacune situées au niveau des attaches des chaînes.

Poids de la neige sur la poutre $q_{neige,poutre}$:

La neige sur la poutre peut être visualisée par la coupe transversale suivante :



Ainsi, bien que la poutre soit ronde, le poids de la neige reste équivalent au poids de la neige tombée sur une planche plane de largeur de 15 cm.

La hauteur de chute de neige est égale à 0,2 m

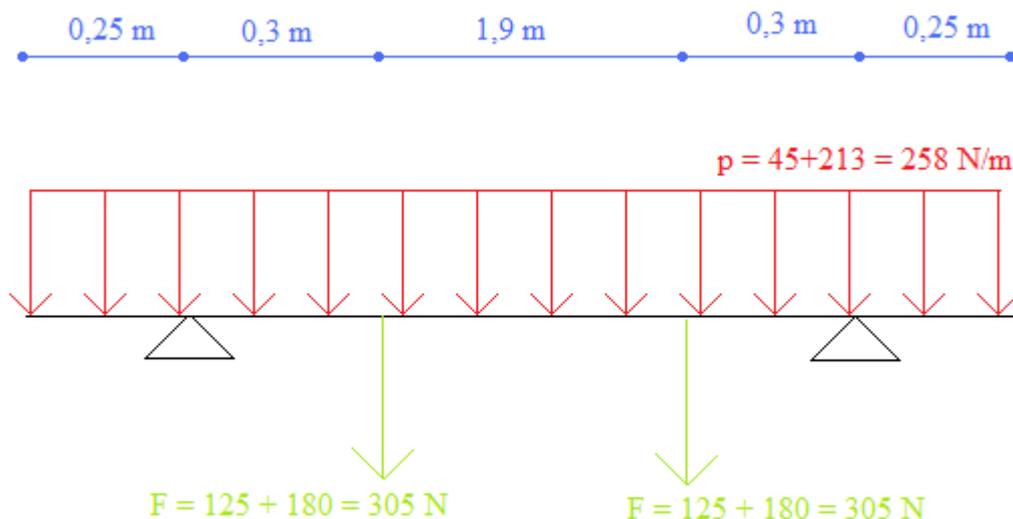
La masse volumique de la neige est prise égale à $\rho_{\text{neige}} = 150 \text{ kg/m}^3$.

Ainsi, la force répartie équivalente est égale à :

$$0,15 \times 0,2 \times 150 = 4,5 \text{ kg/m}$$

c) Résultat de la modélisation

On multipliera par 10 tous les résultats précédents pour avoir des résultats en N.



Remarque 1 :

Concernant les unités, en physique :

- Les forces sont en N
- Le poids est une force

Néanmoins, par abus de langage, en RDM ou en ingénierie, il n'existe pas d'unités spécifiques et on peut très bien parler de poids (ou de forces) en kg !

Remarque 2 :

Concernant les notations :

- G ou g désignent les charges permanentes (poids propre par exemple)
- Q ou q désignent les charges d'exploitation qui ne sont pas présentes en permanence (neige par exemple).

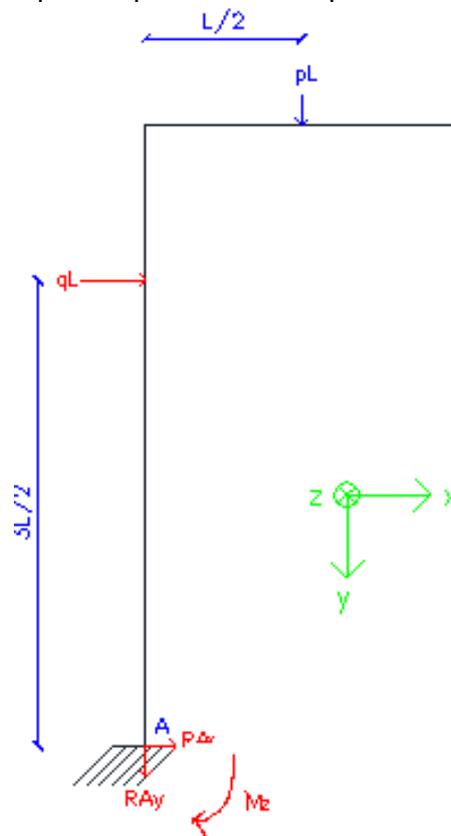
De plus, les forces ponctuelles sont écrites en majuscules (ex : G ou Q), et les forces réparties sont écrites en minuscules (ex : g ou q)

5.2 Réponse exercice [13]

Etape 1 : Mise en place d'un repère global

Etape 2 : Ecrire les réactions au niveau des liaisons

Etape 3 : Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes



Etape 4 : Ecrire les équations d'équilibre du système :

- Somme des forces horizontales nulle : $R_{Ax} + qL = 0$
- Somme des forces verticales nulle : $R_{Ay} + pL + F = 0$
- Moment du système global nul : $M_z + qL \times \frac{3L}{2} + F \times L + pL \times \frac{L}{2} = 0$

Etape 5 : Valorisation des composantes nulles connues aux liaisons

Etape inutile puisqu'il y a suffisamment d'équations

Etape 6 : résolution du système

$$\begin{cases} R_{Ax} + qL = 0 \\ R_{Ay} + pL + F = 0 \\ M_z + qL \times \frac{3L}{2} + F \times L + pL \times \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_{Ax} = -qL \\ R_{Ay} = -pL - F \\ M_z = -\frac{3qL^2}{2} - FL - \frac{pL^2}{2} \end{cases}$$

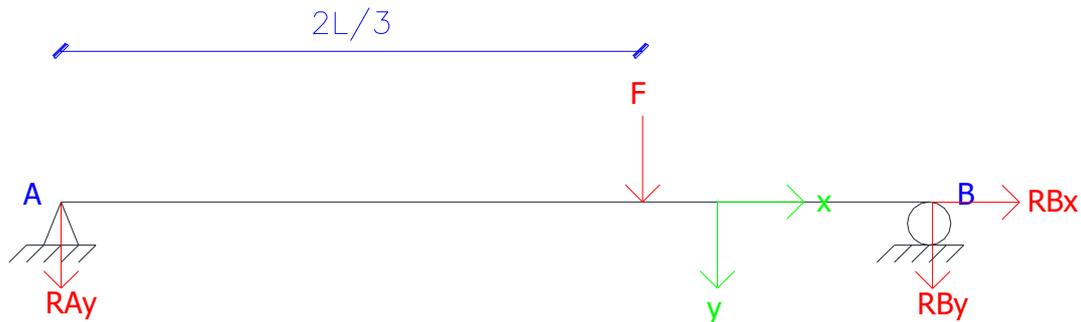
Etape 7 : Rédaction de la solution, au point A :

$$\begin{cases} R_{Ax} = -qL \\ R_{Ay} = -pL - F \\ M_z = -\frac{3qL^2}{2} - FL - \frac{pL^2}{2} \end{cases}$$

5.3 Réponse exercice [14]

Etape 1 : Mise en place d'un repère global

Etape 2 : Ecrire les réactions au niveau des liaisons



Etape 3 : Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes

Pas de forces réparties « ici ».

Etape 4 : Ecrire les équations d'équilibre du système :

- Somme des forces horizontales nulle : $R_{Bx} = 0$
- Somme des forces verticales nulle : $R_{Ay} + R_{By} + F = 0$

Il y a 3 inconnues pour 2 équations, il est donc nécessaire d'avoir une autre équation.

Etape 5 : Valorisation des composantes nulles connues aux liaisons

Par exemple, nous savons que le moment en A est nul donc :

$$M_{z/A} = -F \times \frac{2L}{3} - R_{By} \times L = 0$$

Rq : valoriser que le moment est nul en B aurait été tout à fait valable également.

Etape 6 : résolution du système

$$\begin{cases} R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} + R_{By} + F = 0 \\ -F \times \frac{2L}{3} - R_{By} \times L = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_{Bx} = 0 \\ R_{Ay} = \frac{-F}{3} \\ R_{By} = \frac{-2F}{3} \end{cases}$$

Etape 7 : Rédaction de la solution

Au point A :

$$\begin{cases} R_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = \frac{-F}{3} \\ M_{Az} = 0 \end{cases}$$

et au point B :

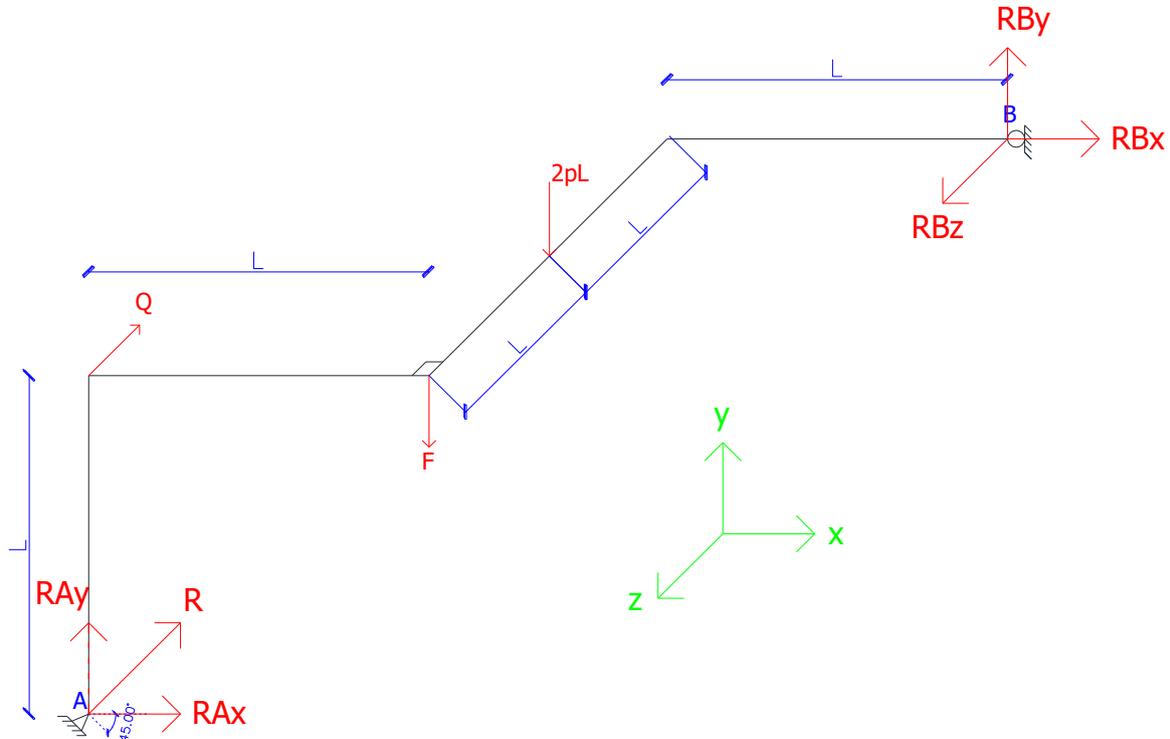
$$\begin{cases} R_{Bx} = 0 \\ R_{By} = \frac{-F}{3} \\ M_{Bz} = 0 \end{cases}$$

5.4 Réponse exercice [15]

Etape 1 : Mise en place d'un repère global

Etape 2 : Ecrire les réactions au niveau des liaisons

Etape 3 : Remplacer les forces réparties par des forces ponctuelles équivalentes



Remarque : la réaction R en A est dans le plan (x,y)

Etape 4 : Ecrire les équations d'équilibre du système :

- Somme des forces selon x nulle : $R_{Ax} + R_{Bx} = 0$
- Somme des forces selon y nulle : $R_{Ay} + R_{By} - 2pL - F = 0$
- Somme des forces selon z nulle : $R_{Bz} - Q = 0$

Etape 5 : Valorisation des composantes nulles connues aux liaisons

Le moment en B est nul donc :

$$\vec{BM} \wedge \vec{F}_{/M} + \vec{BD} \wedge \vec{F}_{/D} + \vec{BC} \wedge \vec{F}_{/C} + \vec{BA} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

$$\text{Donc } \begin{vmatrix} -L & 0 \\ 0 & -2pL \\ L & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -L & 0 \\ 0 & -F \\ 2L & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2L & 0 \\ 0 & 0 \\ 2L & -Q \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2L & 0 \\ -L & R_{Ay} \\ 2L & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} R_{Ax} \\ R_{Ay} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\text{puis : } \begin{cases} 2pL^2 + FL - 2LR_{Ay} + LR_{Ax} = 0 \\ -2QL + 2LR_{Ax} = 0 \\ 2pL^2 + 2FL - 2LR_{Ay} = 0 \end{cases}$$

Etape 6 : résolution du système

$$\begin{cases} 2pL^2 + FL - 2LR_{Ay} + LR_{Ax} = 0 & (1) \\ -2QL + 2LR_{Ax} = 0 & (2) \\ 2pL^2 + 2FL - 2LR_{Ay} = 0 & (3) \\ R_{Ax} + R_{Bx} = 0 & (4) \\ R_{Ay} + R_{By} - 2pL - F = 0 & (5) \\ R_{Bz} - Q = 0 & (6) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) impliquent que : $\begin{cases} R_{Ax} = Q \\ R_{Ay} = F + pL \end{cases}$

Or l'équation (1) pour être vérifiée impose que : $F = Q$

Les équations (4), (5) et (6) indiquent que : $\begin{cases} R_{Bx} = -Q = -F \\ R_{By} = pL \\ R_{Bz} = Q = F \end{cases}$

Etape 7 : Rédaction de la solution

On a : $Q = -F$ pour obtenir une solution du système trouvé, ainsi

$$\text{Au point A : } \begin{cases} R_{Ax} = Q & M_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = Q + pL & M_{Ay} = 0 \\ R_{Az} = 0 & M_{Az} = 0 \end{cases} \quad \text{Au point B : } \begin{cases} R_{Bx} = -Q & M_{Bx} = 0 \\ R_{By} = pL & M_{By} = 0 \\ R_{Bz} = Q & M_{Bz} = 0 \end{cases}$$

ATTENTION

Au point A, la liaison est une liaison simple, la réaction doit nécessairement être perpendiculaire au sol.

Or pour satisfaire ce critère, nous devons nécessairement avoir $R_{Ax} = R_{Ay}$. Dans cet exemple, nous n'avons pas toujours cette condition impliquant que l'équilibre statique n'est pas toujours vérifié et donc qu'il existe des cas où il y a un déplacement.

Au final :

$$\begin{cases} \text{Si } Q = Q + pL \text{ alors équilibre statique} \\ \text{sinon il y a déplacement} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Si } p \text{ est nul alors équilibre statique} \\ \text{sinon il y a déplacement} \end{cases}$$

Ainsi, pour obtenir une solution, $Q = F$ nécessairement.

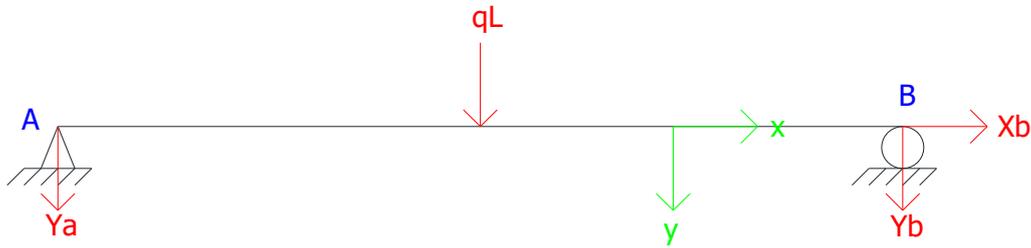
De plus, afin d'obtenir l'équilibre statique, p doit être nul.

Au final :

$$\text{Au point A : } \begin{cases} R_{Ax} = Q & M_{Ax} = 0 \\ R_{Ay} = Q & M_{Ay} = 0 \\ R_{Az} = 0 & M_{Az} = 0 \end{cases} \quad \text{Au point B : } \begin{cases} R_{Bx} = -Q & M_{Bx} = 0 \\ R_{By} = 0 & M_{By} = 0 \\ R_{Bz} = Q & M_{Bz} = 0 \end{cases}$$

6. Calculs des diagrammes de sollicitations

6.1 Réponse exercice [16]



Réactions des appuis

Equilibre des forces :
$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B + qL = 0 \quad (*) \end{cases}$$

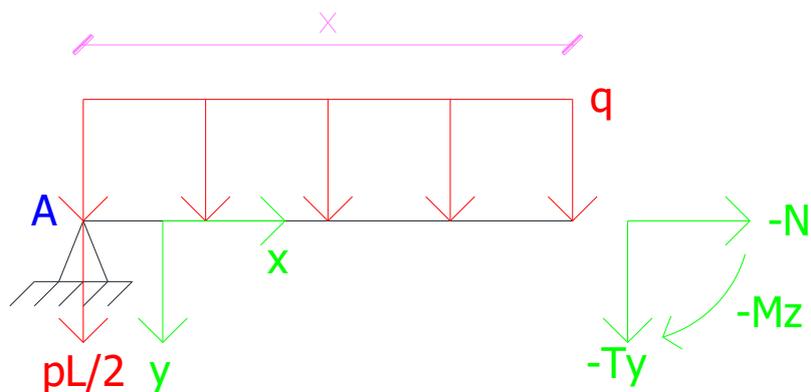
Le moment en A est nul : $L Y_B + qL \times \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow Y_B = -\frac{qL}{2}$

(*) $\Rightarrow Y_A = -\frac{qL}{2}$

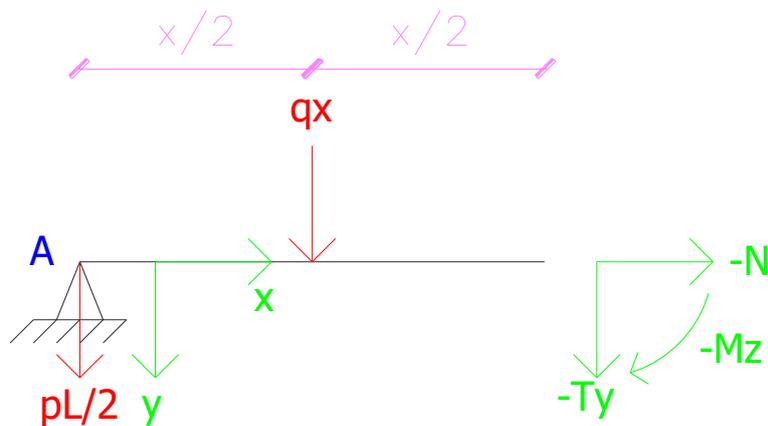
Les réactions d'appuis sont :
$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A = -\frac{qL}{2} \\ Y_B = -\frac{qL}{2} \end{cases}$$

Diagramme des contraintes

A l'abscisse x,



Equivalent à



Equilibre de la section

$$-N = 0 \Leftrightarrow \boxed{N = 0}$$

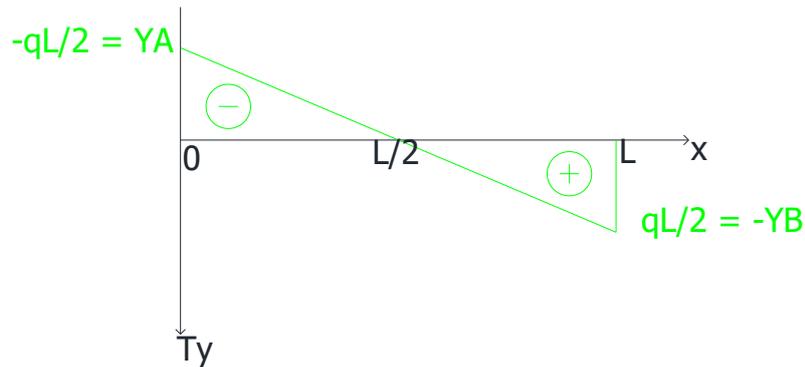
$$-T_y + qx - \frac{ql}{2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_y = qx - \frac{ql}{2}}$$

$$-M_z - qx \cdot \frac{x}{2} + \frac{ql}{2} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \boxed{M_z = \frac{qx}{2}(l - x)}$$

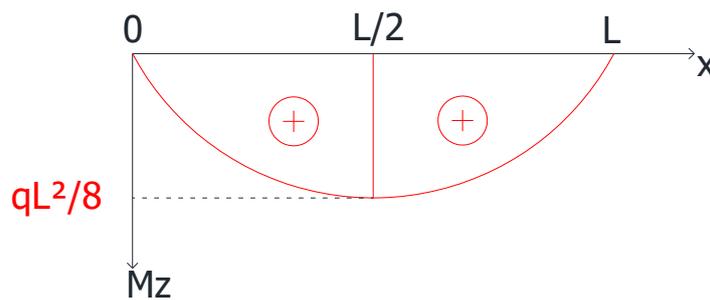
Diagrammes

Effort normal nul en tout point

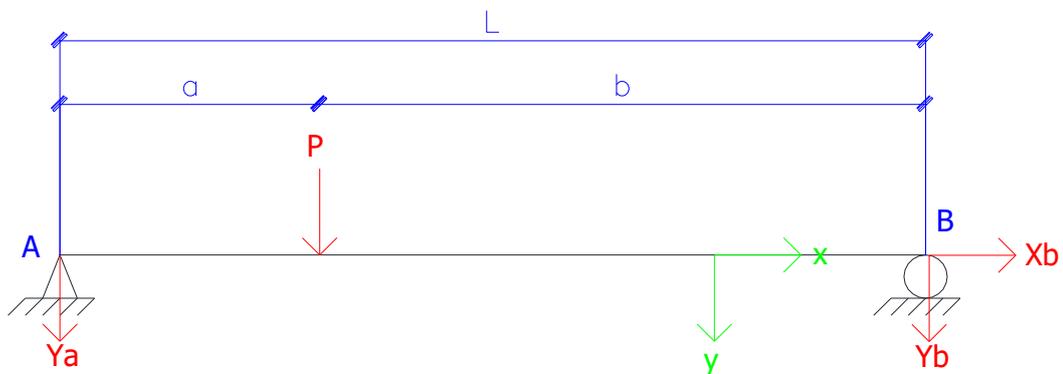
Effort tranchant :



Moment fléchissant :



6.2 Réponse exercice [17]



Réactions des appuis

Equilibre des forces : $\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A + Y_B + P = 0 \quad (*) \end{cases}$

Le moment en A est nul : $aP + LY_B = 0 \Rightarrow Y_B = \frac{-aP}{L}$

$$(*) \Rightarrow Y_A = \frac{aP}{L} - P$$

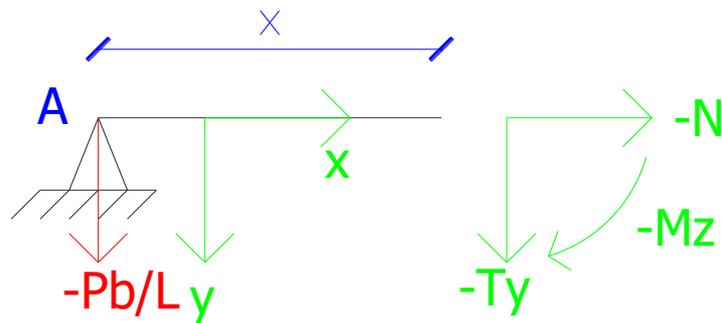
$$\Rightarrow Y_A = P \left(\frac{a}{L} - 1 \right) = P \left(\frac{a - a - b}{L} \right) = \frac{-bP}{L}$$

Les réactions d'appuis sont :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_A = \frac{-bP}{L} \\ Y_B = \frac{-aP}{L} \end{cases}$$

Équilibre des sections

Pour $0 \leq x < a$



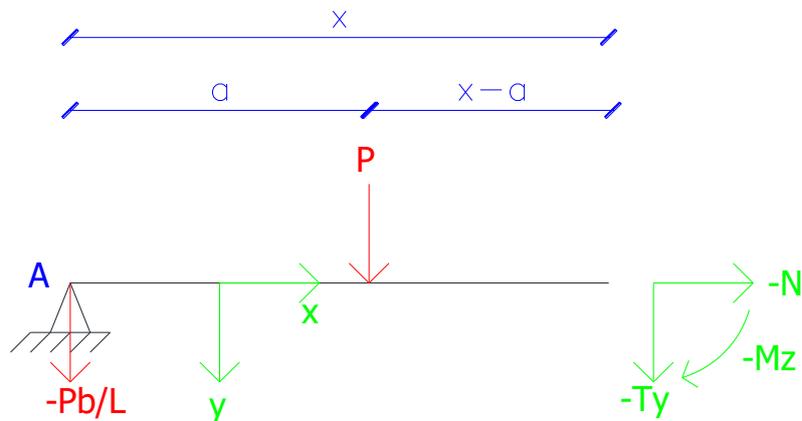
Equilibre

$$-N = 0 \Leftrightarrow \boxed{N = 0}$$

$$-T_y - \frac{Pb}{L} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_y = -\frac{Pb}{L}}$$

$$-M_z + \frac{Pb}{L} \cdot x = 0 \Leftrightarrow \boxed{M_z = \frac{Pbx}{L}}$$

Pour $a \leq x \leq L$



Equilibre

$$-N = 0 \Leftrightarrow \boxed{N = 0}$$

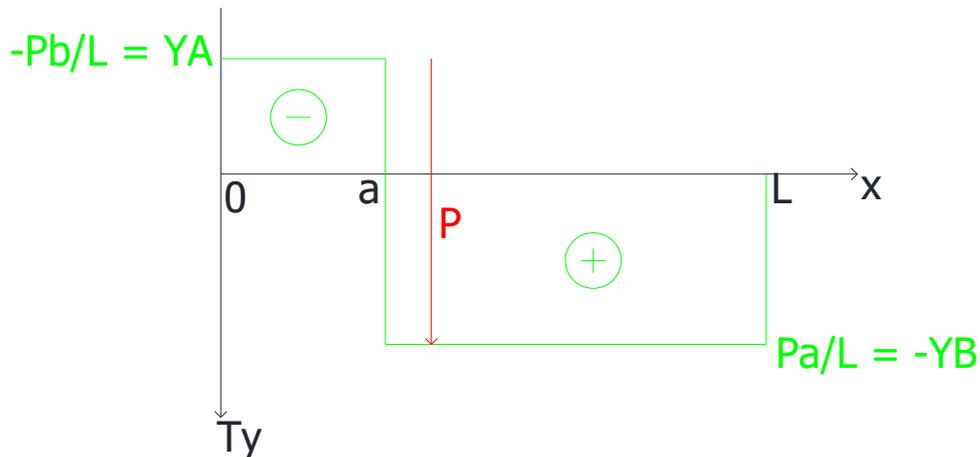
$$-T_y + P - \frac{Pb}{L} = 0 \Leftrightarrow \boxed{T_y = \frac{Pa}{L}}$$

$$-M_z + \frac{Pb}{L} \cdot x - P(x - a) = 0 \Leftrightarrow M_z = Pa \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

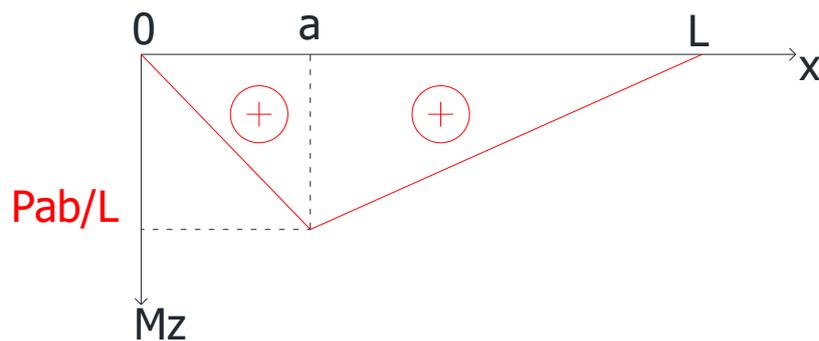
Diagrammes

Effort normal nul en tout point

Effort tranchant :



Moment fléchissant :



6.3 Réponse exercice [18]

Réactions à l'appui

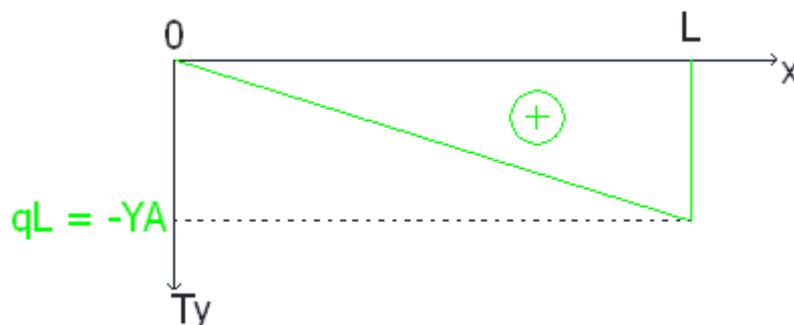
Les réactions d'appui sont :

$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = -qL \\ M_A = \frac{qL^2}{2} \end{cases}$$

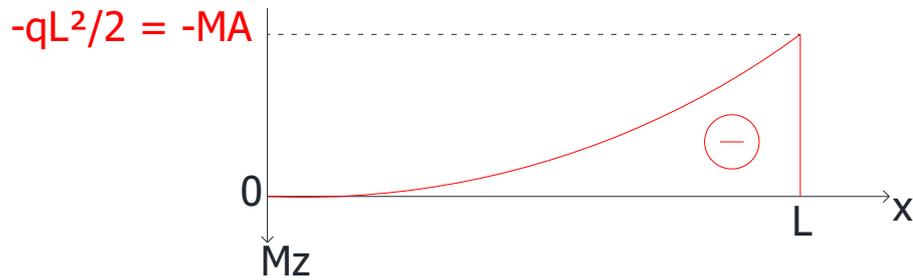
Diagrammes

Effort normal nul en tout point

Effort tranchant : $T_y = qx$



Moment fléchissant : $M_z = \frac{-qx^2}{2}$



6.4 Réponse exercice [19]

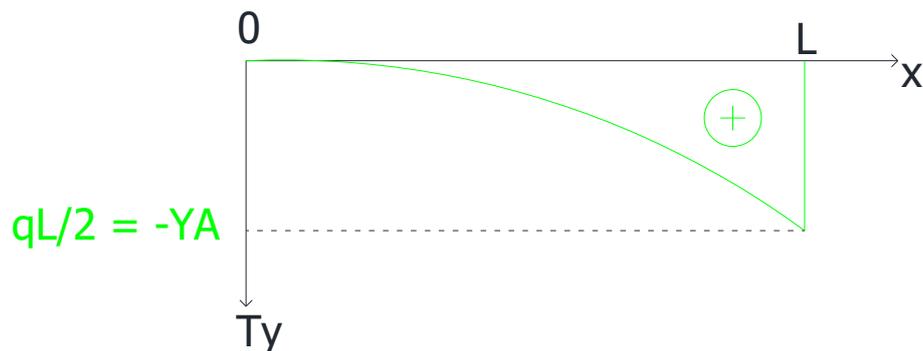
Réactions à l'appui

Les réactions d'appui sont :
$$\begin{cases} X_A = 0 \\ Y_A = \frac{-qL}{2} \\ M_A = \frac{qL^2}{6} \end{cases}$$

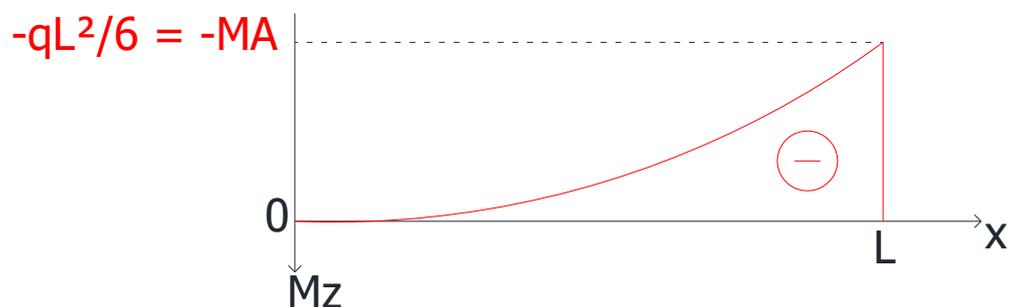
Diagrammes

Effort normal nul en tout point

Effort tranchant : $T_y = \frac{qx^2}{2L}$



Moment fléchissant : $M_z = \frac{-qx^3}{6L}$



6.5 Réponse exercice [20]

Réactions aux appuis

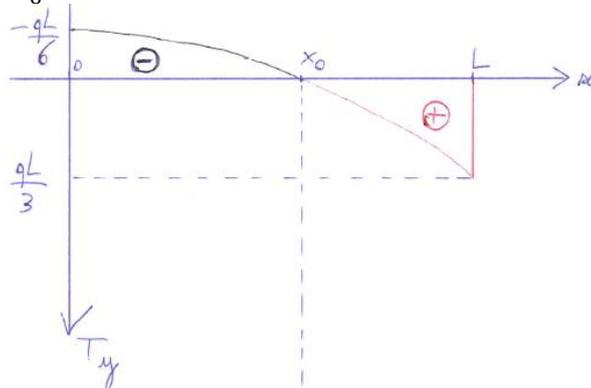
Les réactions d'appui sont :

$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = \frac{-qL}{3} \\ Y_A = \frac{-qL}{6} \end{cases}$$

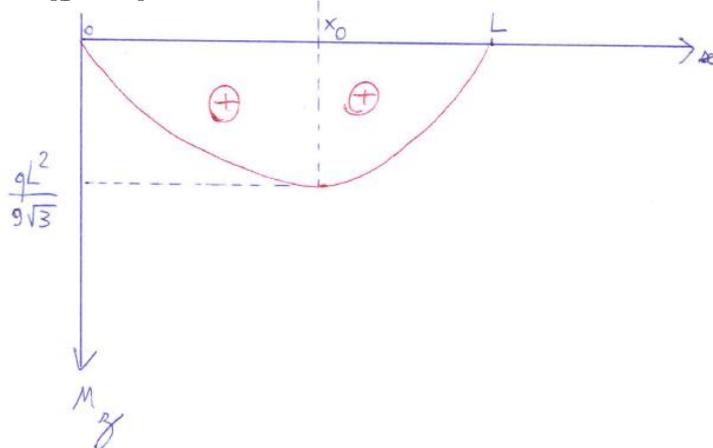
Diagrammes

Effort normal nul en tout point

Effort tranchant : $T_y = \frac{qx^2}{2L} - \frac{qL}{6}$



Moment fléchissant : $M_z = \frac{-qx^3}{6L} + \frac{qLx}{6}$



Avec $x_0 = \frac{L}{\sqrt{3}}$

6.6 Réponse exercice [21]

Réactions aux appuis

Les réactions d'appui sont :

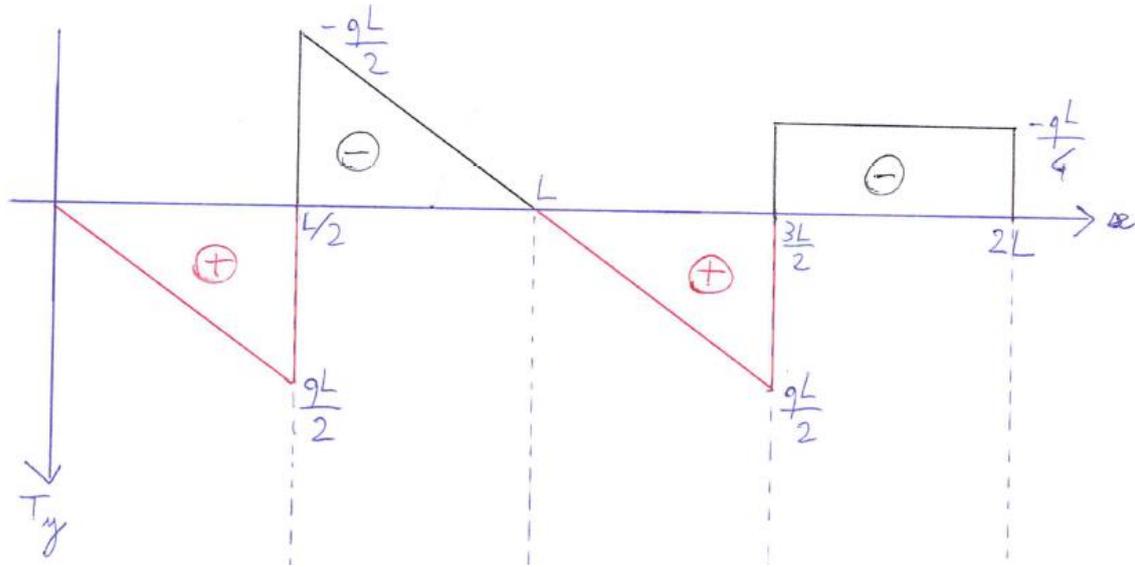
$$\begin{cases} X_B = 0 \\ Y_B = \frac{-3qL}{4} \\ Y_A = -qL \end{cases}$$

Diagrammes

Effort normal nul en tout point

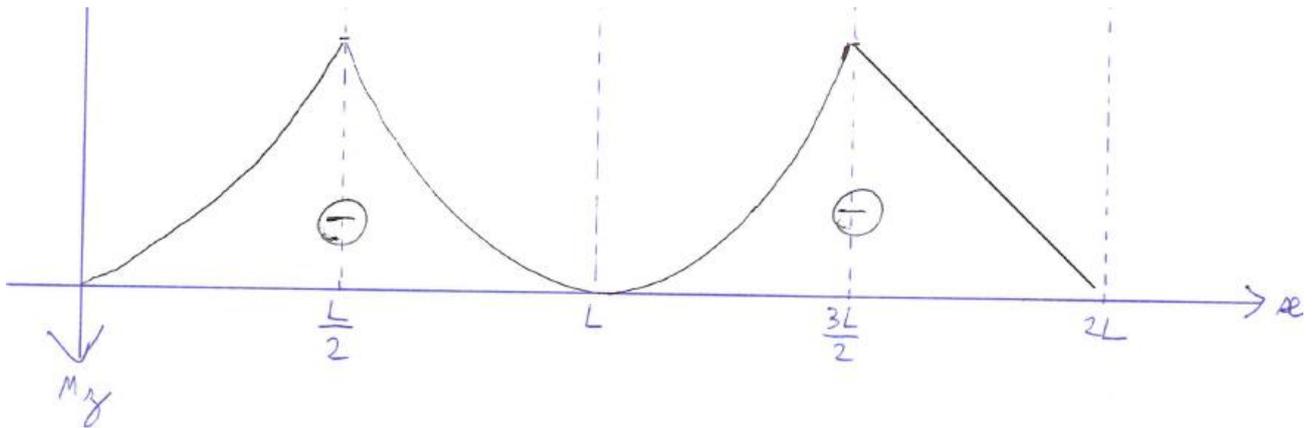
Effort tranchant :

$$\begin{cases} T_y = qx & \text{pour } 0 < x < \frac{L}{2} \\ T_y = q(x - L) & \text{pour } \frac{L}{2} < x < \frac{3L}{2} \\ T_y = \frac{-qL}{4} & \text{pour } \frac{3L}{2} < x < 2L \end{cases}$$



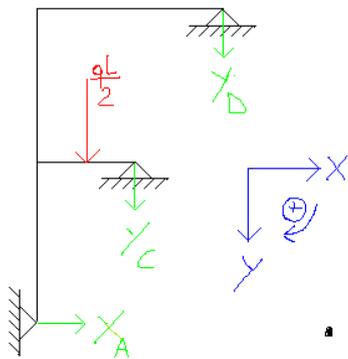
Moment fléchissant :

$$\begin{cases} M_z = \frac{-qx^2}{2} & \text{pour } 0 < x < \frac{L}{2} \\ M_z = \frac{-qx^2}{2} + qLx - \frac{qL^2}{2} & \text{pour } \frac{L}{2} < x < \frac{3L}{2} \\ M_z = \frac{-qL}{4}(2L - x) & \text{pour } \frac{3L}{2} < x < 2L \end{cases}$$



6.7 Réponse exercice [22]

* Mise en place des charges ponctuelles équivalentes et des réactions d'appuis



• La somme des forces est nulle

$$\Rightarrow X_A = 0$$

$$\Rightarrow Y_C + Y_D + \frac{qL}{2} = 0 \quad (\Delta)$$

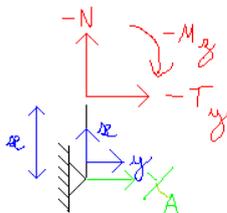
• le moment en C est nul

$$M_C = 0 \Rightarrow -\frac{qL}{2} \times \frac{L}{4} + Y_D \times \frac{L}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Y_D = \frac{qL}{4}$$

$$(\Delta) \Leftrightarrow Y_C = -\frac{qL}{4} - \frac{qL}{2} \Leftrightarrow Y_C = -\frac{3qL}{4}$$

* Coupe entre A et B

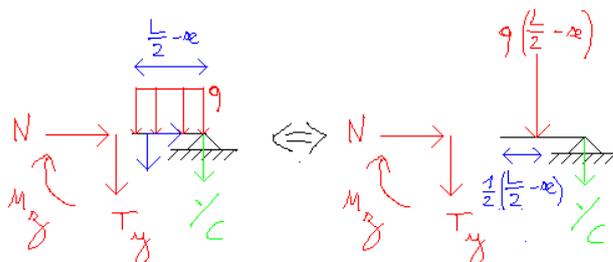


$$N + 0 = 0 \Rightarrow N = 0$$

$$-T_y + X_A = 0 \Rightarrow T_y = 0$$

$$-M_z - x \times X_A = 0 \Rightarrow M_z = 0$$

* Coupe entre B et C



$$N + 0 = 0 \Rightarrow N = 0$$

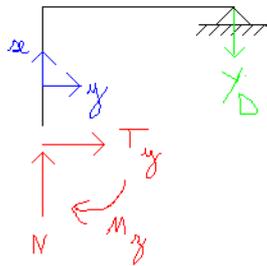
$$T_y + q\left(\frac{L}{2} - x\right) + Y_C = 0$$

$$\Rightarrow T_y = q\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{3qL}{4}$$

$$\Rightarrow T_y = qx + \frac{qL}{4}$$

$$M_z + q\left(\frac{L}{2} - x\right) \times \frac{1}{2}\left(\frac{L}{2} - x\right) + Y_C \times \left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow M_z = \frac{qL^2}{4} - \frac{qLx}{4} - \frac{qL^2}{2}$$

Coupe entre B et E

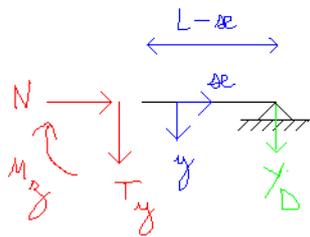


$$N - Y_D = 0 \Rightarrow N = \frac{qL}{4}$$

$$T_y + 0 = 0 \Rightarrow T_y = 0$$

$$M_z + Y_D \times L = 0 \Rightarrow M_z = \frac{-qL^2}{4}$$

Coupe entre E et D



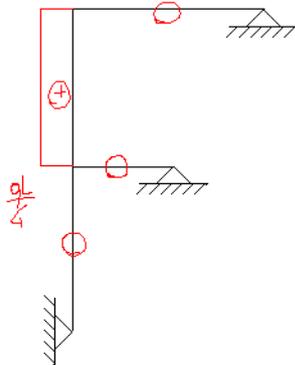
$$N = 0$$

$$T_y + Y_D = 0 \Rightarrow T_y = -\frac{qL}{4}$$

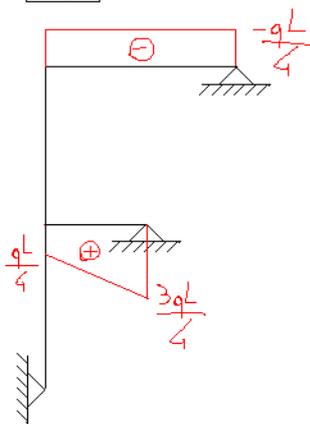
$$M_z + Y_D(L-x) = 0 \Rightarrow M_z = \frac{-qL^2}{4} + \frac{qLx}{4}$$

Diagrammes

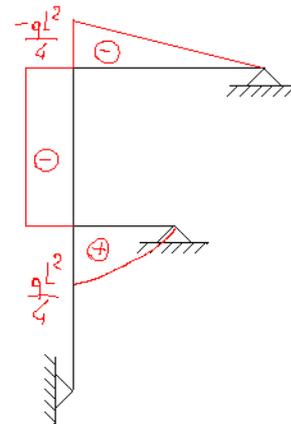
N



T_y

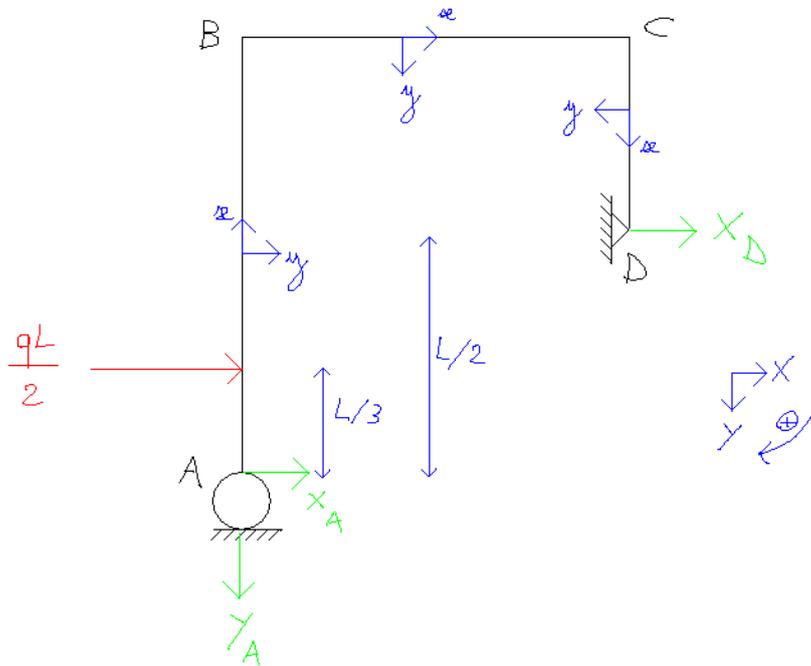


M_z



6.8 Réponse exercice [23]

Mise en place des réactions d'appuis et du chargement ponctuel équivalent



Le moment est nul en A :

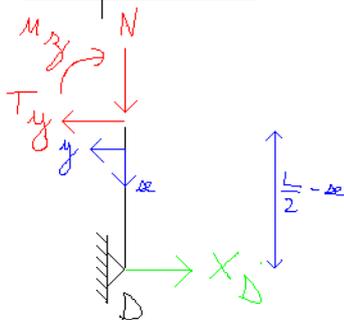
$$M_A = 0 \Leftrightarrow \frac{qL}{2} \times \frac{L}{3} + X_D \times \frac{L}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow X_D = -\frac{qL}{3}$$

La somme des forces est nulle : $Y_A = 0$

$$X_A + X_D + \frac{qL}{2} = 0 \Leftrightarrow X_A = -\frac{qL}{2} + \frac{qL}{3} \Leftrightarrow X_A = -\frac{qL}{6}$$

Coupe CD

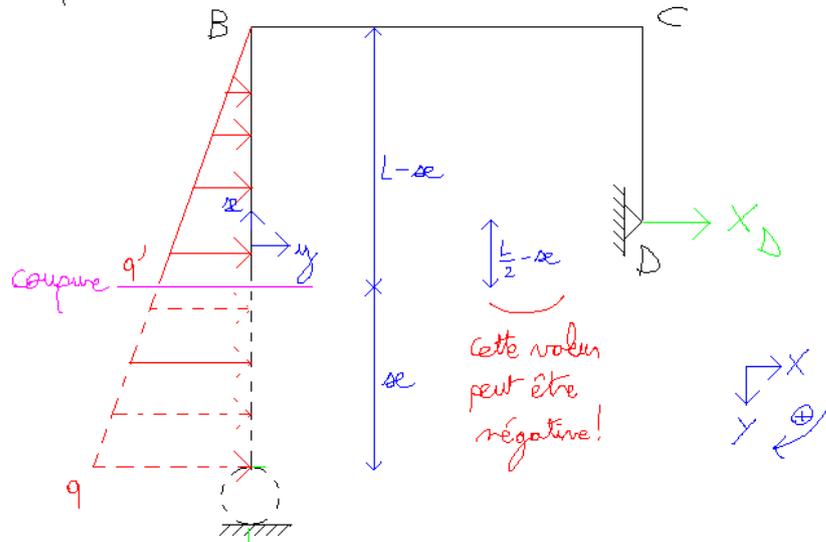


$$N = 0$$

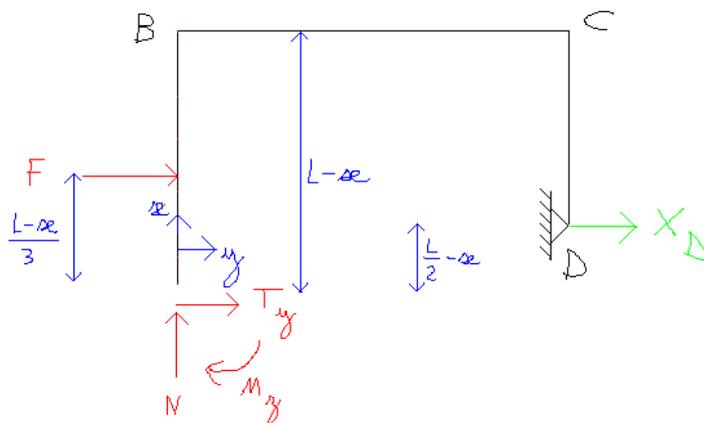
$$-T_y + X_D = 0 \Rightarrow T_y = \frac{-qL}{3}$$

$$M_z - X_D \left(\frac{L}{2} - x \right) = 0 \Leftrightarrow M_z = \frac{qLx}{3} - \frac{qL^2}{6}$$

Coupure AB



$$\frac{q'}{q} = \frac{L-x}{L} \Leftrightarrow q' = q \frac{L-x}{L}$$



$$F = q' \frac{L-x}{2}$$

$$\Leftrightarrow F = \frac{q(L-x)^2}{2L}$$

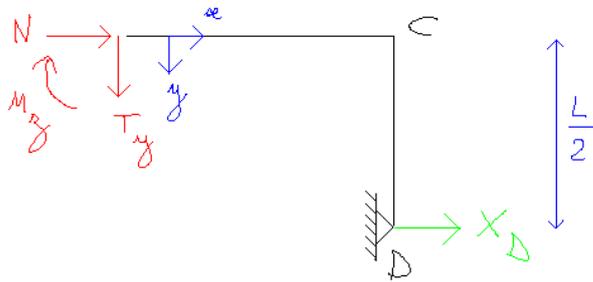
$$N = 0$$

$$T_y + F + X_D = 0$$

$$\Leftrightarrow T_y = -\frac{qL}{6} + qx - \frac{qx^2}{2L}$$

$$M_y + F \times \left(\frac{L-x}{3}\right) + X_D \times \left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Leftrightarrow M_y = \frac{qx^3}{6L} - \frac{qx^2}{2} + \frac{qLx}{6}$$

Coupe BC



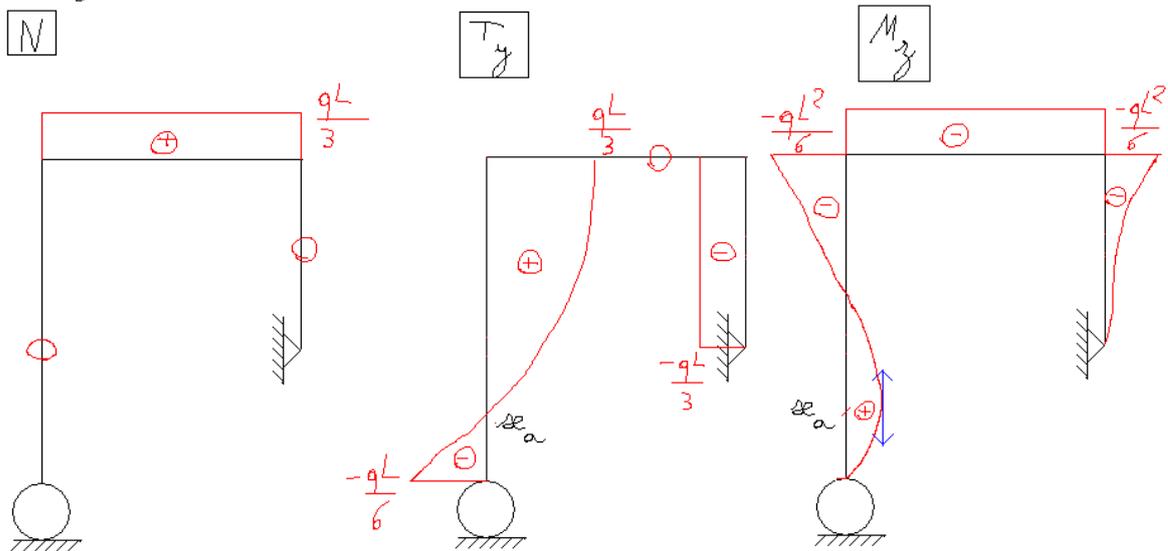
$$N + X_D = 0$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{qL}{3}$$

$$T_y = 0$$

$$M_y - X_D \times \frac{L}{2} = 0 \Leftrightarrow M_y = \frac{-qL^2}{6}$$

Diagrammes

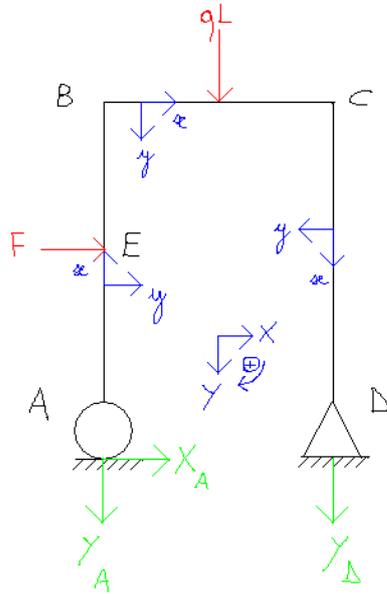


Sur la poutre AB : $T_y = -\frac{qL}{6} + qe - \frac{qe^2}{2L}$

Donc $-\frac{qL}{6} + qe - \frac{qe^2}{2L} = 0 \Leftrightarrow e_a = \frac{(-\sqrt{6}+3)L}{3}$

6.9 Réponse exercice [24]

Mise en place des réactions d'appuis et du chargement équivalent.



Le moment est nul en A

$$M_{/A} = 0 \Leftrightarrow Fx \frac{H}{2} + qL \times \frac{L}{2} + Y_D \times L = 0$$

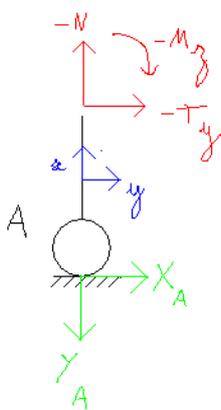
$$\Leftrightarrow Y_D = -\frac{FH}{2L} - \frac{qL}{2}$$

La somme des force est nulle:

$$F + X_A = 0 \Leftrightarrow X_A = -F$$

$$Y_A + qL + Y_D = 0 \Leftrightarrow Y_A = \frac{FH}{2L} - \frac{qL}{2}$$

Coupe sur AE

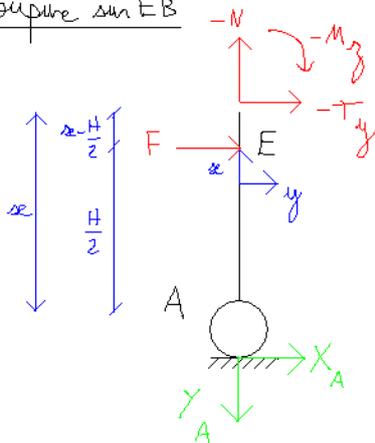


$$-N - Y_A = 0 \Leftrightarrow N = -Y_A = \frac{FH}{2L} + \frac{qL}{2}$$

$$-T_y + X_A = 0 \Leftrightarrow T_y = X_A = -F$$

$$-M_z - X_A \times x = 0 \Leftrightarrow M_z = Fx$$

Coupe sur EB



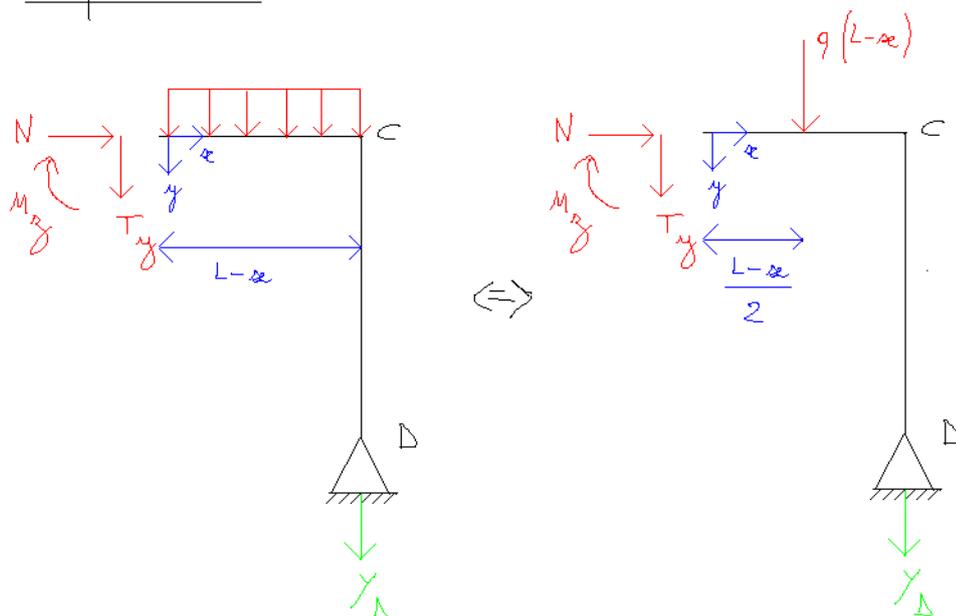
$$-N - Y_A = 0 \Leftrightarrow N = -Y_A = \frac{FH}{2L} + \frac{qL}{2}$$

$$-T_y + F + X_A = 0 \Leftrightarrow T_y = 0$$

$$-M_z - F \times \left(x - \frac{H}{2}\right) - X_A \times x = 0$$

$$\Leftrightarrow M_z = \frac{FH}{2}$$

Coupe sur BC



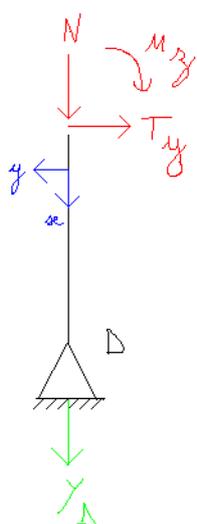
$$N = 0$$

$$T_y + q(L-a) + Y_D = 0 \Leftrightarrow T_y = q a + \frac{FH}{2L} - \frac{qL}{2}$$

$$M_z + q(L-a) \times \frac{L-a}{2} + Y_D \times (L-a) = 0$$

$$\Leftrightarrow M_z = -\frac{qa^2}{2} - \frac{FH a}{2L} + \frac{qL a}{2} + \frac{FH}{2}$$

Coupe sur CD

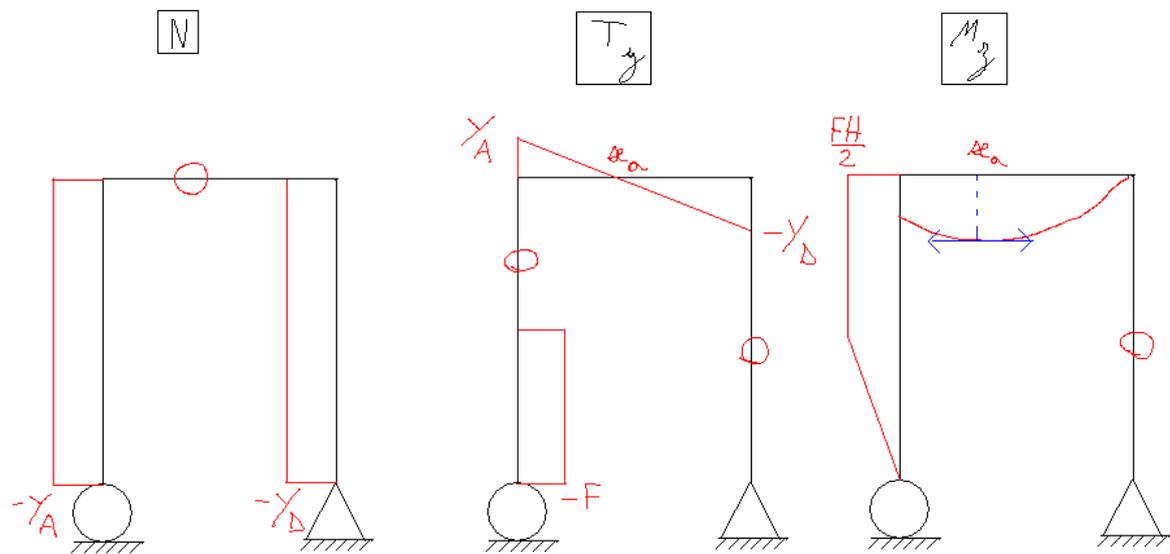


$$N + Y_D = 0 \Leftrightarrow N = -Y_D = -\frac{FH}{2L} + \frac{qL}{2}$$

$$T_y = 0$$

$$M_z = 0$$

Diagrammes

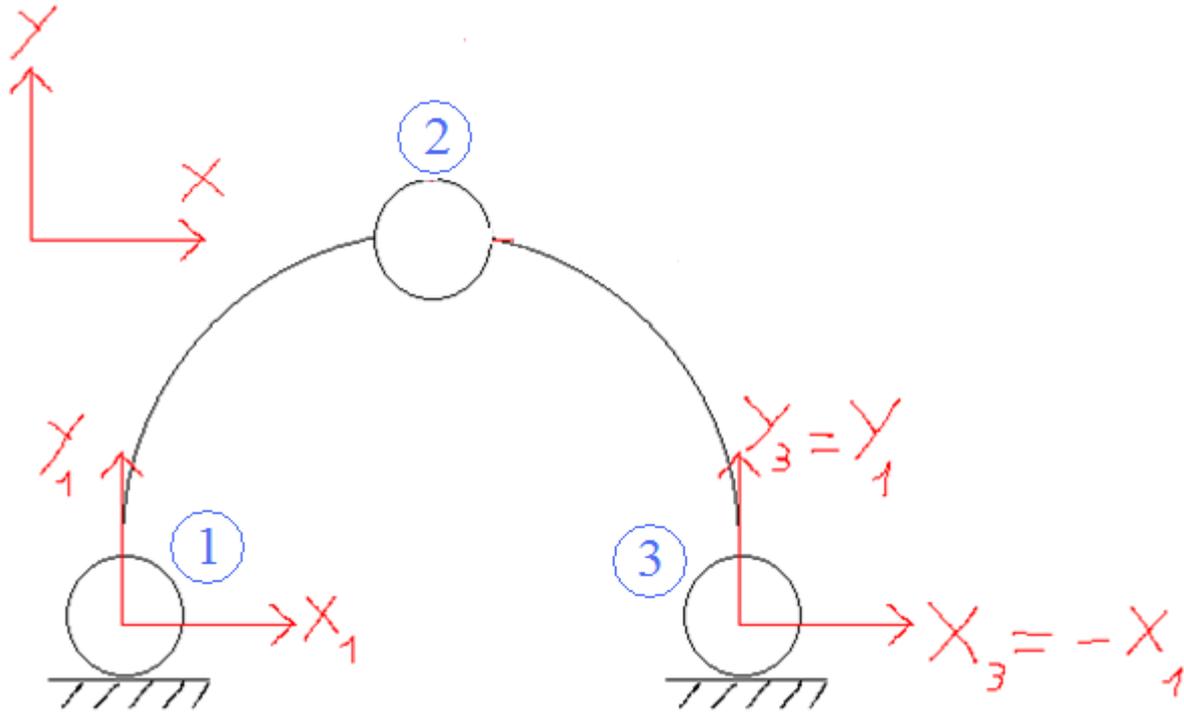


$$\text{Sur BC, } T_y = q\alpha + \frac{FH}{2L} - \frac{qL}{2}$$

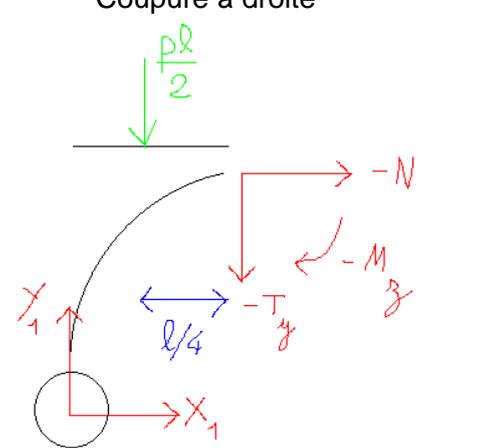
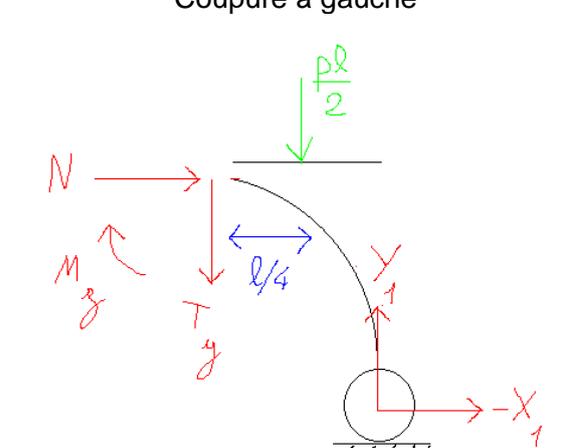
$$\text{Donc } q\alpha_a + \frac{FH}{2L} - \frac{qL}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha_a = \frac{L}{2} - \frac{FH}{2qL}$$

6.10 Réponse exercice [25]

1) Par symétrie $\begin{cases} Y_1 = Y_3 \\ X_1 = -X_3 \end{cases}$



Au point (2) :

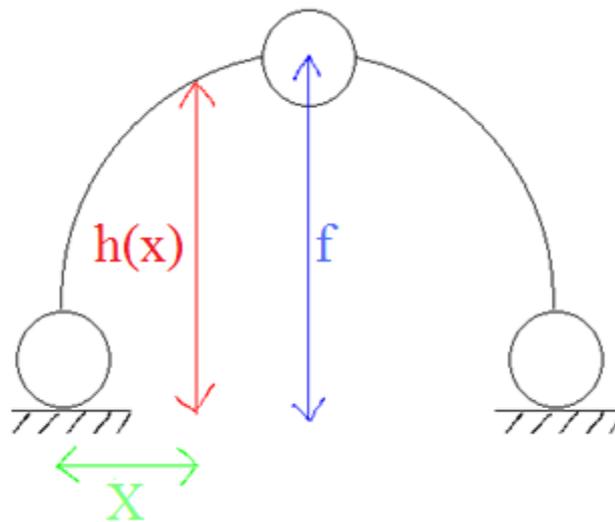
Coupure à droite	Coupure à gauche
	
<p>Equilibre des forces verticales :</p> $-T_y + \frac{pl}{2} - Y_1 = 0$ <p>D'où $T_y = \frac{pl}{2} - Y_1$</p>	<p>Equilibre des forces verticales :</p> $T_y + \frac{pl}{2} - Y_1 = 0$ <p>D'où $T_y = \frac{-pl}{2} + Y_1$</p>

Donc $T_y = -T_y$ impliquant qu'au point (2), $T_y = 0$

On en déduit que $\frac{pl}{2} - Y_1 = 0$ donc $Y_1 = \frac{pl}{2}$

De plus le moment au point (2) est nul (rotule intérieure) : $M_{(2)} = 0$ donc $X_1 = \frac{pl^2}{8f}$

2) L'équation de l'arc parabolique est sous la forme : $h(X) = aX^2 + bX + c$



Avec
$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ h\left(\frac{l}{2}\right) = f \\ h(l) = 0 \end{cases}$$

Après résolution de l'équation :
$$h(X) = \frac{-4f}{l^2} X^2 + \frac{4f}{l} X$$

3) Le rapport $\frac{Y_1}{X_1}$ vaut $\frac{pl}{2} \times \frac{8f}{pl^2} = \frac{4f}{l}$

Et la dérivée de l'équation $h(X)$ est égale à $h'(X) = \frac{-8f}{l^2} X + \frac{4f}{l}$

Ainsi au point $X = 0$, la dérivée de $h(X)$ est égale à $h'(0) = \frac{4f}{l}$

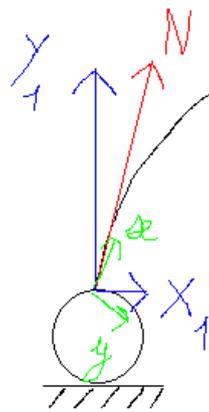
Comme $\frac{Y_1}{X_1} = h'(0)$, on en déduit que les actions de liaison sont tangentes à l'arc.

4) Au point de liaison (1)

Calcul du moment :

Pour une rotule : $M_z = 0$

Calcul de l'effort tranchant :



L'action est tangente à l'arc, donc $T_y = 0$

Calcul de l'effort normal :

$$N = \sqrt{Y_1^2 + X_1^2} = \sqrt{\left(\frac{pl^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{pl^2}{8f}\right)^2}$$

Donc $N = \frac{pl}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}}$

5) Au point de liaison (2)

Calcul du moment :

Pour une rotule : $M_z = 0$

Calcul de l'effort tranchant : $T_y = 0$ d'après la réponse (1)

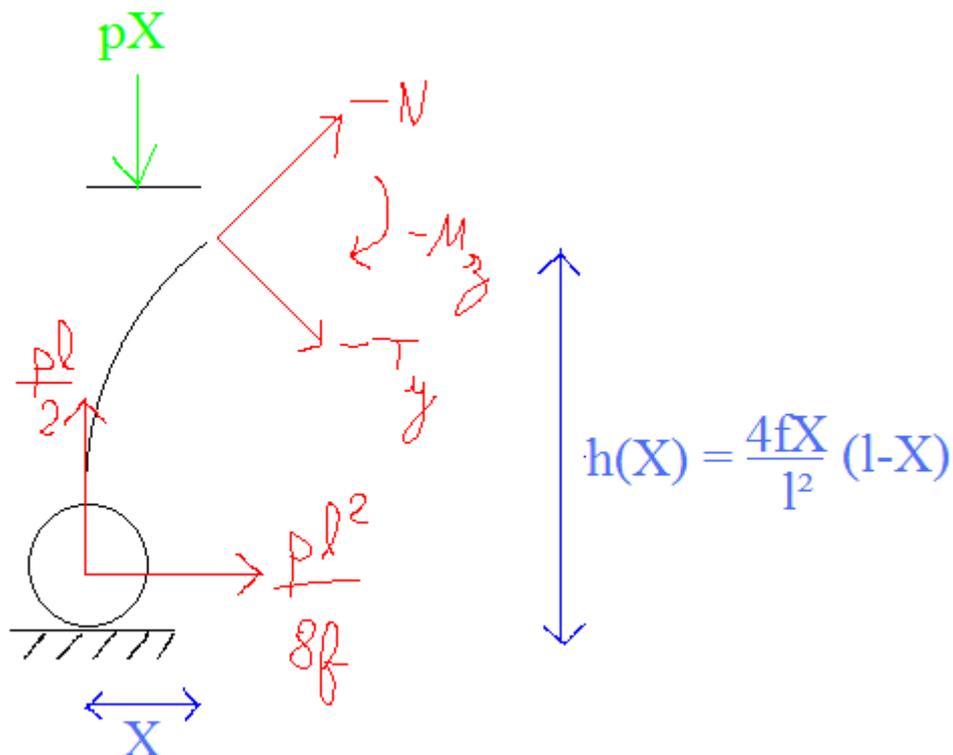
Calcul de l'effort normal :

La force répartie « p » et l'action de liaison Y_1 sont parallèle au plan de la section (2), donc ils ne peuvent pas participer à l'effort normal.

L'action de liaison X_1 est perpendiculaire à la section (2) donc l'équilibre des forces selon la direction x est : $X_1 - N = 0$

Ainsi $N = X_1 = \frac{pl^2}{8f}$

6) En tout point d'abscisse X



Calcul du moment :

L'équilibre du moment donne : $-M_z - pX \times \frac{X}{2} + \frac{pl}{2} \times X - \frac{pl^2}{8f} \times \frac{4fX}{l^2} \times (l-X) = 0$

Et au final $M_z = 0$

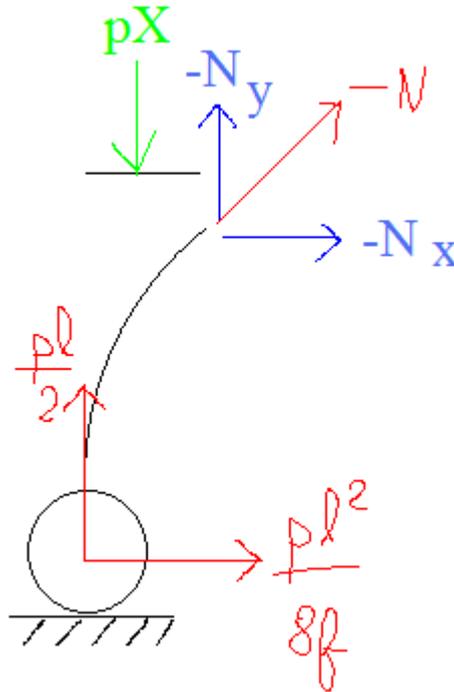
Calcul de l'effort tranchant :

La relation qui lie l'effort tranchant au moment fléchissant est : « $\frac{dM_z}{dx} = -T_y$ » n'est pas valable pour une poutre non droite. Il convient de l'abscisse curviligne pour obtenir une relation similaire entre le moment fléchissant et l'effort tranchant.

Or $M_z = 0$ quelque soit son abscisse (repère local ou global) donc sa dérivée est nécessairement nulle.

Et on en déduit que $T_y = 0$

Calcul de l'effort normal :



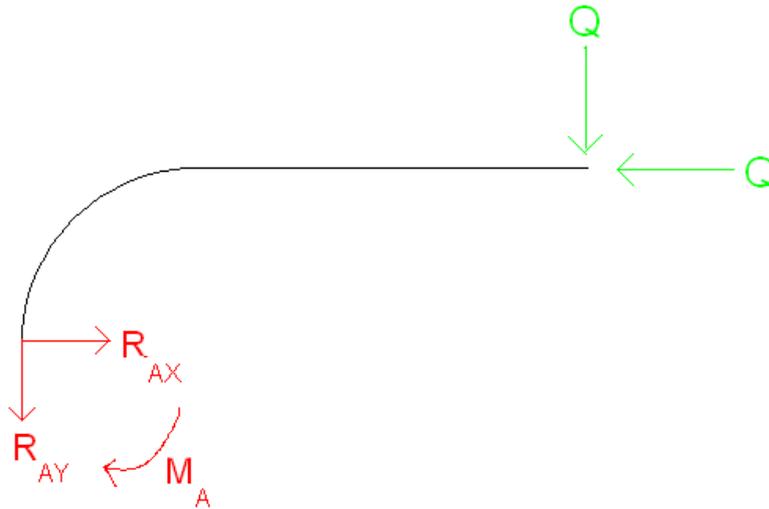
Par équilibre des forces horizontales : $N_x = \frac{pl^2}{8f}$

Par équilibre des forces verticales : $N_y = pX - \frac{pl}{2}$

Ainsi $N = \sqrt{\left(\frac{pl^2}{8f}\right)^2 + \left(pX - \frac{pl}{2}\right)^2}$

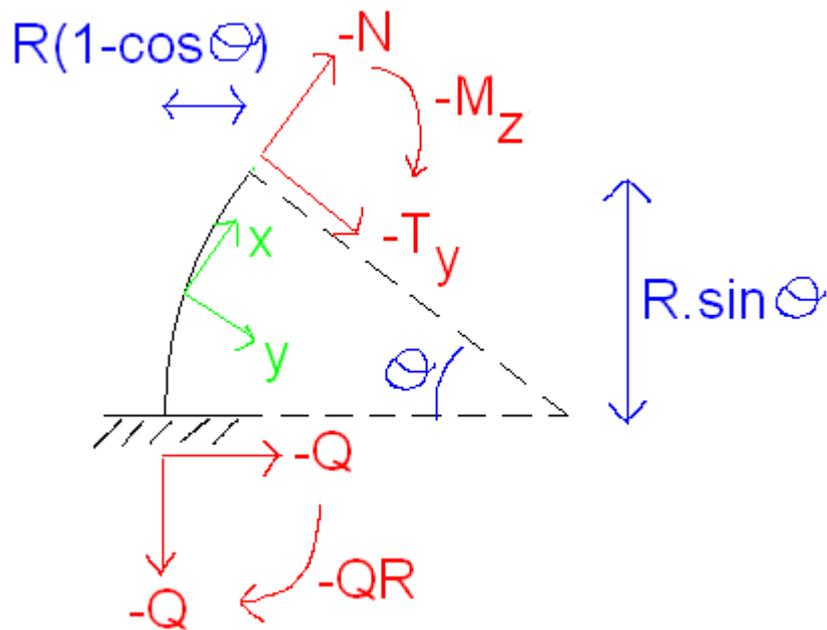
6.11 Réponse exercice [26]

1) Réactions d'appui

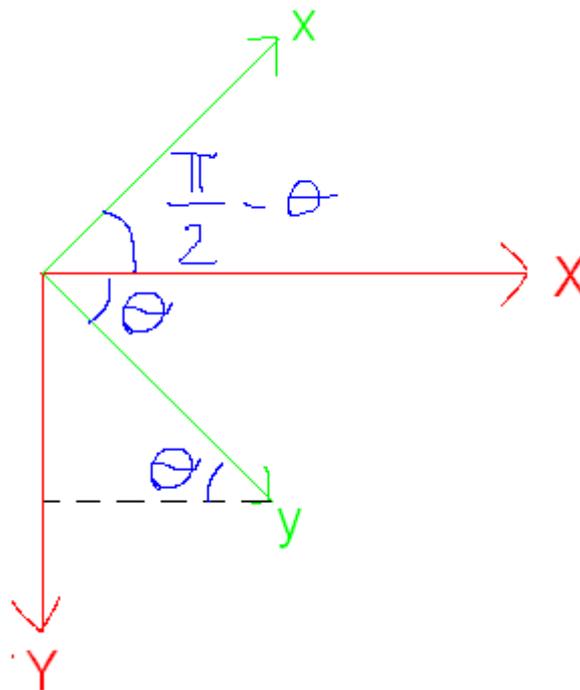


$$\begin{aligned} R_{AX} - Q &= 0 \rightarrow \boxed{R_{AX} = Q} \\ R_{AY} + Q &= 0 \rightarrow \boxed{R_{AY} = -Q} \\ M_A + 2QR - QR &= 0 \rightarrow \boxed{M_A = -QR} \end{aligned}$$

2) Section AB



Le repère (x,y) est une rotation du repère (X,Y) de l'angle $(\frac{\pi}{2} - \theta)$



Le changement de repère est :

$$\begin{cases} x = X \cos \theta - Y \sin \theta \\ y = X \sin \theta + Y \cos \theta \end{cases}$$

Remarque : cela n'est valable que pour un repère indirect. Pour un repère direct, remplacer y par -y et Y par -Y.

$$\vec{R}_A \begin{pmatrix} Q \\ -Q \end{pmatrix}_{XY} = \begin{pmatrix} Q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + Q \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \\ Q \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) - Q \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \end{pmatrix}_{xy} = \begin{pmatrix} Q(\cos \theta + \sin \theta) \\ Q(\cos \theta - \sin \theta) \end{pmatrix}_{xy}$$

L'équilibre de la section est :

$$\begin{pmatrix} -N \\ -T_y \end{pmatrix}_{xy} + \begin{pmatrix} Q(\cos \theta + \sin \theta) \\ Q(\cos \theta - \sin \theta) \end{pmatrix}_{xy} = \vec{0}$$

Au final, $N = Q(\cos \theta + \sin \theta) = Q\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

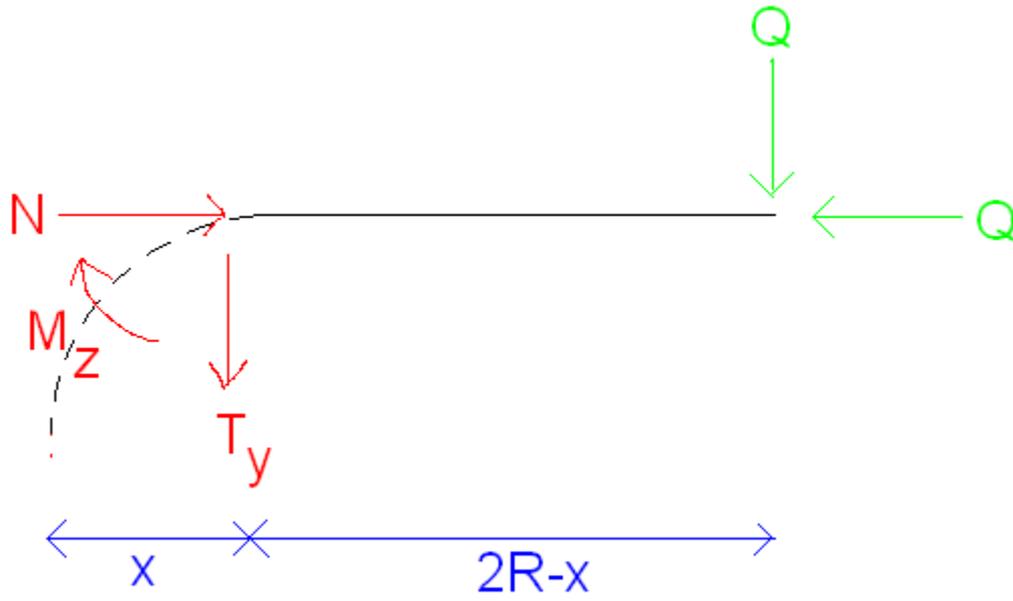
Et $T_y = Q(\cos \theta - \sin \theta) = -Q\sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$

Calcul du moment

$$-M_z - QR + QR(1 - \cos \theta) - QR \sin \theta = 0$$

$$M_z = -QR\sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

3) Section BC



$$N - Q = 0$$

$$\boxed{N = Q}$$

$$T_y + Q = 0$$

$$\boxed{T_y = -Q}$$

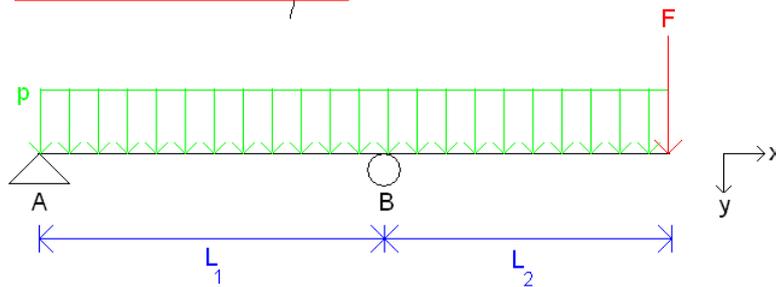
$$M_z + Q(2R - x) = 0$$

$$\boxed{M_z = Q(x - 2R)}$$

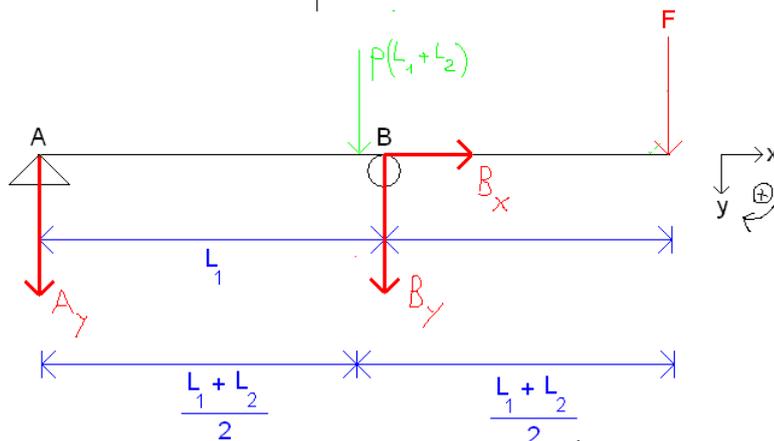
6.12 Réponse exercice [27]

- 1) Une poutre = 3 équations
 1 rotule entre la poutre et le sol = 2 inconnues
 1 appui simple entre la poutre et le sol = 1 inconnue } 3 inconnues
- Au final $R = 3 - 3 = 0$
 \Rightarrow structure isostatique car $h = 0$ et aucun mouvement possible.

2)



équivalent à



- Le moment en A est nul (appui simple en extrémité):

$$M_A = 0 \Leftrightarrow p(L_1 + L_2) \times \frac{L_1 + L_2}{2} + B_y \times L_1 + F(L_1 + L_2) = 0$$

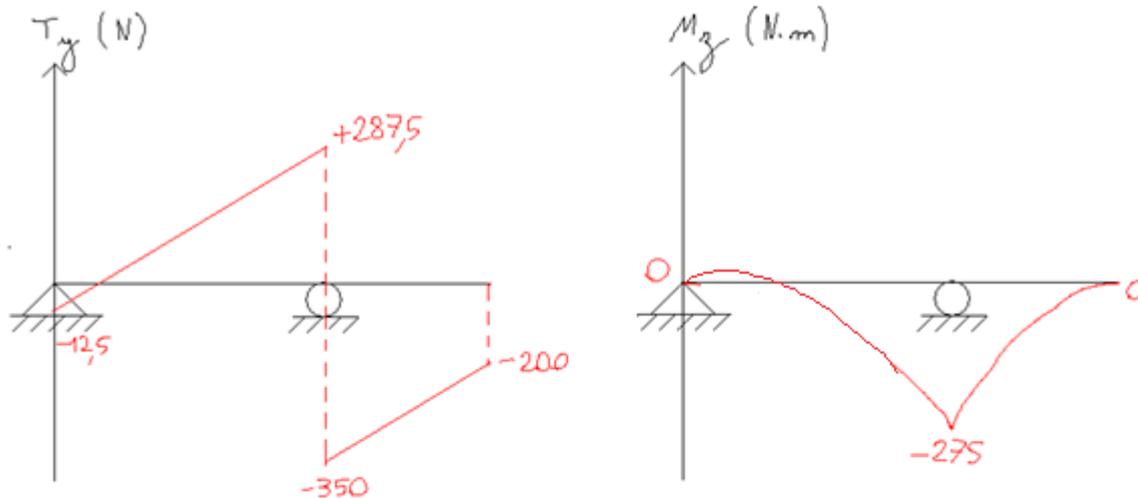
$$\Leftrightarrow B_y = -F \left(1 + \frac{L_2}{L_1} \right) - p \left(\frac{L_1^2 + L_2^2}{2L_1} + L_2 \right)$$

- Somme des forces nulles $\sum F_x = 0 \Leftrightarrow B_x = 0$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow A_y + B_y + p(L_1 + L_2) + F = 0$$

$$\Leftrightarrow A_y = F \left(\frac{L_2}{L_1} \right) - p \frac{L_1^2 - L_2^2}{2L_1}$$

Diagrammes $N=0$



Méthode 2 : tracé direct

Diagramme T_y

- À gauche du diagramme, on sait que $T_y = A_y = -12,5 \text{ N}$
- Entre A et B, il y a une force répartie de 150 N/m qui correspond à la pente du diagramme d'effort tranchant (on retrouve l'équation

$$T_y = -12,5 + 150x$$

Donc $T_y (x = 2 \text{ m}) = -12,5 + 150 \times 2 = 287,5 \text{ N}$

- Au niveau de la liaison B, il y a $B_y = -637,5 \text{ N}$. Il y a donc un "saut" d'effort tranchant de $-637,5 \text{ N}$ entre $x = 2^- \text{ m}$ et $x = 2^+ \text{ m}$.

Donc $T_y (x = 2^+ \text{ m}) = 287,5 - 637,5 = -350 \text{ N}$

- Entre B et l'extrémité, la pente du diagramme à l'effort tranchant est égale à $p = 150 \text{ N/m}$

donc $\frac{T_y(x = 3 \text{ m}) - T_y(x = 2^+ \text{ m})}{1 \text{ m}} = 150 \Rightarrow T_y(x = 3 \text{ m}) = -200 \text{ N}$

Remarque cela se traduit par $T_y(x) = ax + b$ avec $T_y(2 \text{ m}) = -350$ et $a = 150$

donc $T_y(x) = 150x - 650$

Diagramme M_z

On sait que

$$\frac{dM_z}{dx} = -T_y \quad (1)$$

$$M_z(x=0\text{ m}) = 0 \quad (2)$$

$$M_z(x=3\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

$$x \in [0; 2[, T_y(x) = -12,5 + 150x \quad (4)$$

$$x \in]2; 3[, T_y(x) = -650 + 150x \quad (5)$$

Entre 0 et 2 m

$$(1) \text{ et } (4) \Rightarrow M_z(x) = 12,5x - 75x^2 + A$$

$$(2) \Rightarrow A = 0$$

$$\text{Donc } M_z(x) = 12,5x - 75x^2$$

Entre 2 et 3 m

$$(1) \text{ et } (5) \Rightarrow M_z(x) = 650x - 75x^2 + B$$

$$(3) \Rightarrow 0 = 650 \times 3 - 75 \times 3^2 + B \Rightarrow B = -1275$$

$$\text{Donc } M_z(x) = -75x^2 + 650x - 1275$$

Diagramme N

$N=0$ puisqu'aucune force selon \vec{x} n'est présente.

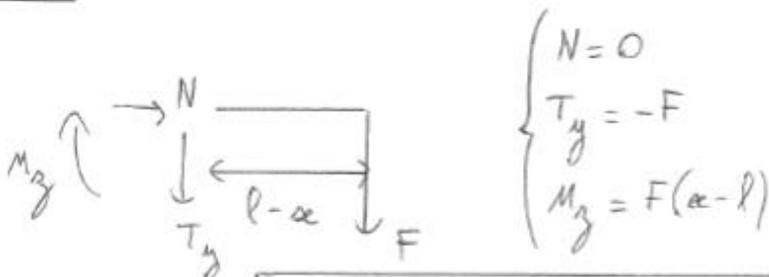
Bilan

Les diagrammes peuvent être tracés.

6.13 Réponse exercice [28]

1)

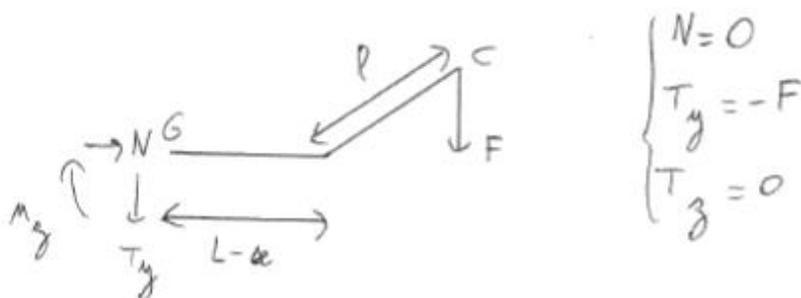
Entre BC



D'où le tenseur :

$$\mathcal{G}_{BC} \left\{ \begin{array}{ll} N=0 & M_x=0 \\ T_y = -F & M_y=0 \\ T_z=0 & M_z = F(\alpha-l) \end{array} \right\}$$

Entre AB



Équilibre des moments : $\vec{e}_C \wedge \vec{F} + \vec{M} = \vec{0}$

$$\begin{vmatrix} L-\alpha & 0 \\ 0 & 1 \\ l & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ F \\ 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

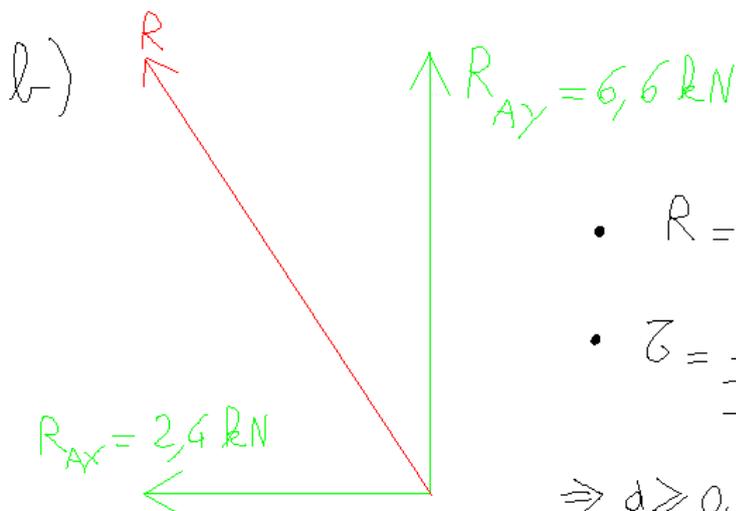
$$\Rightarrow \begin{cases} M_x = Fl \\ M_y = 0 \\ M_z = F(\alpha-L) \end{cases}$$

d'où le tenseur

$$\mathcal{G}_{AB} \left\{ \begin{array}{ll} N=0 & M_x = Fl \\ T_y = -F & M_y = 0 \\ T_z = 0 & M_z = F(\alpha-L) \end{array} \right\}$$

$$2) \begin{cases} M_{z\max} = 0 \\ M_{z\min} = -FL = -5F \\ N_{\max} = 0 \\ |V_{y\max}| = F \\ |M_{\text{ax}}| = FL = 3F \end{cases}$$

6.14 Réponse exercice [29]

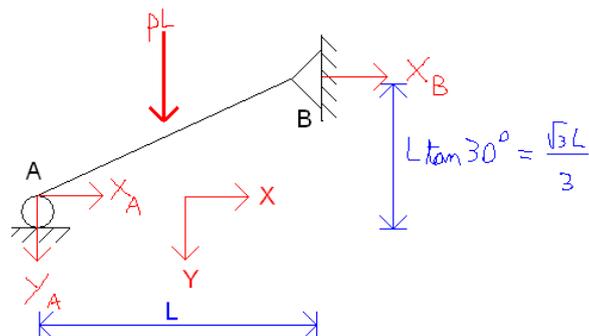


- $R = \sqrt{6,6^2 + 2,4^2} = 7,0 \text{ kN}$

- $\sigma = \frac{R}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq 52 \cdot 10^6 \text{ Pa}$

$\Rightarrow d \geq 0,0132 \text{ m} \Rightarrow d \geq 13,2 \text{ mm}$

6.15 Réponse exercice [30]



Le moment en A est nul :

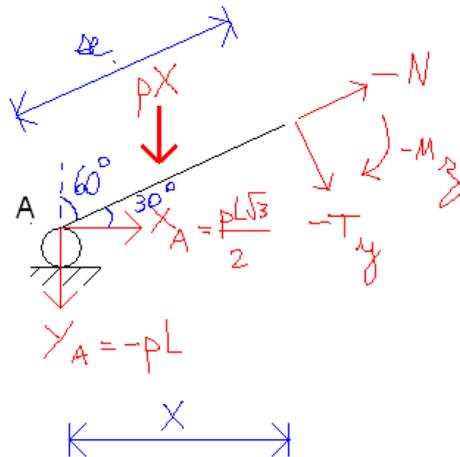
$$pL \times \frac{L}{2} + X_B \times \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot L = 0 \Leftrightarrow X_B = -\frac{pL\sqrt{3}}{2}$$

La somme des forces est nulle :

$$\sum F_X = 0 \Leftrightarrow X_A + X_B = 0 \Leftrightarrow X_A = \frac{pL\sqrt{3}}{2}$$

$$\sum F_Y = 0 \Leftrightarrow Y_A + pL = 0 \Leftrightarrow Y_A = -pL$$

Coupure :



$$-N + pL \cdot \cos(60^\circ) + \frac{pL\sqrt{3}}{2} \cdot \cos(30^\circ) - pX \cdot \cos(60^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{5pL}{4} - \frac{pX\sqrt{3}}{2}$$

Avec

$$X = x \cdot \cos(30^\circ) = \frac{x \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Donc

$$\boxed{N = \frac{5pL}{4} - \frac{3px}{4}}$$

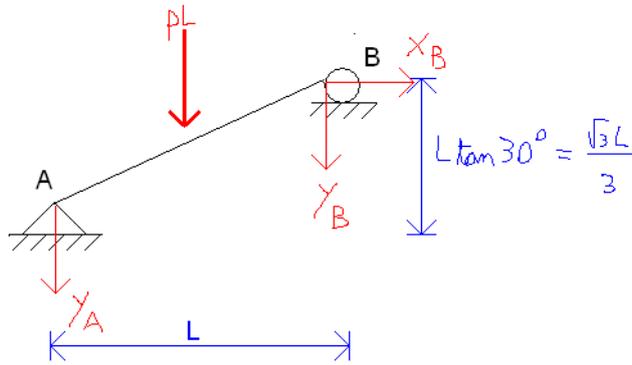
$$-T_y - pL \cdot \sin(60^\circ) + \frac{pL\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(30^\circ) + \frac{px \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot \sin(60^\circ) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_y = -\frac{pL\sqrt{3}}{4} + \frac{3px}{4}}$$

$$-M_z - \frac{px\sqrt{3}}{2} \times \frac{x\sqrt{3}}{4} - \frac{pL\sqrt{3}}{2} \times \frac{x}{2} + pL \times \frac{x\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_z = -\frac{3px^2}{8} + \frac{pLx\sqrt{3}}{4}}$$

6.16 Réponse exercice [31]



Le moment en B est nul

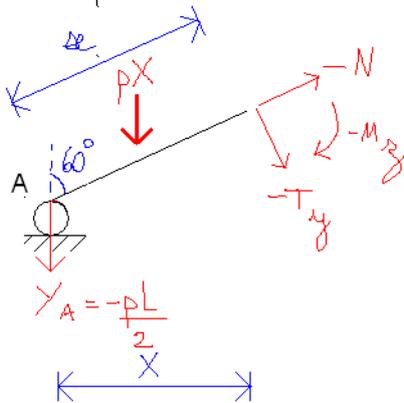
$$-pL \times \frac{L}{2} - Y_A \times L = 0$$

donc
$$Y_A = -\frac{pL}{2}$$

$$\sum F_y = 0 \Leftrightarrow Y_A + Y_B + pL = 0 \Leftrightarrow Y_B = \frac{-pL}{2}$$

$$\sum F_x = 0 \Leftrightarrow X_B = 0$$

Compure



$$-N + \frac{pL}{2} \cos(60) - pX \cos(60) = 0$$

$$\Leftrightarrow N = \frac{pL}{4} - \frac{pX}{2} \text{ ou } N = \frac{pL}{4} - \frac{p\sqrt{3}x}{4}$$

$$\text{car } X = x \cos(30) = \frac{\sqrt{3}x}{2}$$

$$-T_y - \frac{pL}{2} \sin(60) + pX \sin(60) = 0$$

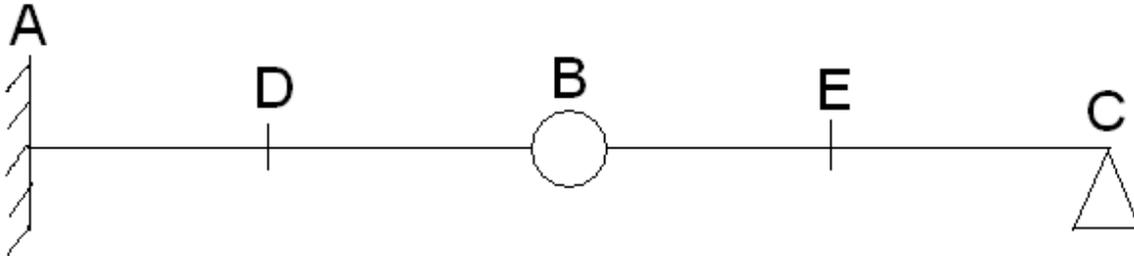
$$\Leftrightarrow T_y = \frac{p\sqrt{3}X}{2} - \frac{pL\sqrt{3}}{4} \text{ ou } T_y = \frac{3px}{4} - \frac{pL\sqrt{3}}{4}$$

$$-M_y + \frac{pL}{2} \times X - pX \times \frac{X}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow M_y = \frac{pLX}{2} - \frac{pX^2}{2} \text{ ou } M_y = \frac{pL\sqrt{3}x}{4} - \frac{3px^2}{8}$$

7. Tracé direct des diagrammes de sollicitations

7.1 Réponse exercice [32]



Tronçon « AD » :

$$a) \frac{dM_z}{dx} = \frac{-50+87,5}{5} = 7,5$$

Or la relation qui lie l'effort tranchant au moment fléchissant est : $\frac{dM_z}{dx} = -V_y$

Donc $V_y = -7,5$ kN sur le tronçon AD

b) $M_z(A) = M_z(x=0)$ donc $M_z(A) = -87,5$ kN.m

c) d'après l'énoncé $V_y(C) = V_y(A)$ donc $V_y(C) = -7,5$ kN

Tronçon « EC » :

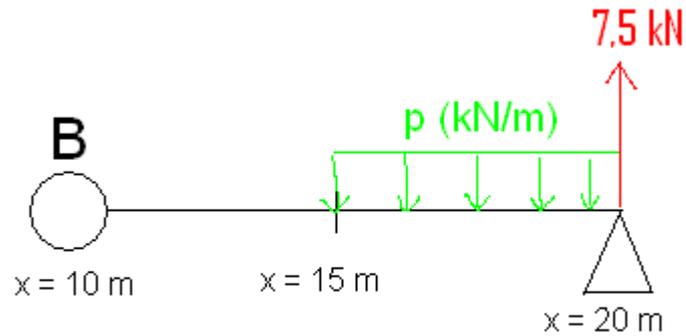
La charge est répartie car la courbe de l'effort tranchant est une droite inclinée.

Tronçon « BE » :

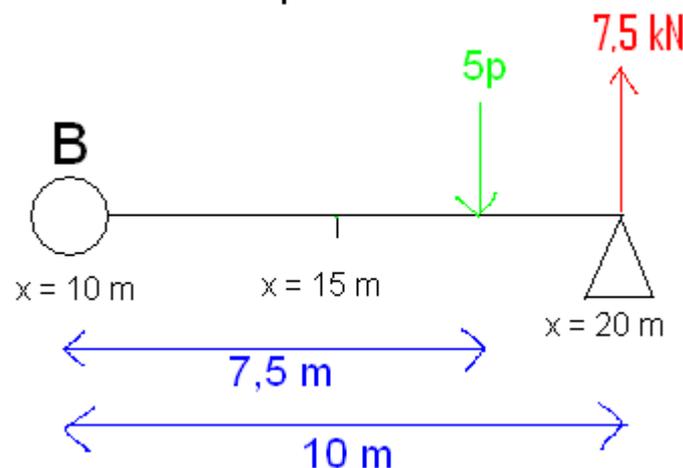
Aucune charge car la courbe de l'effort tranchant est constante.

Tronçon « BC » :

Les résolutions précédentes sont :



équivalent à

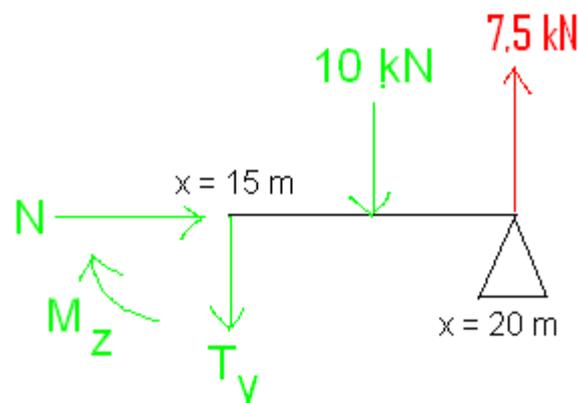


Le moment fléchissant en B est nul puisque nous avons une rotule, donc : $M_z(B) = 0$

D'où $7,5p \times 5p - 10 \times 7,5 = 0$

Et $p = 2 \text{ kN/m}$

Coupure à l'abscisse $x = 15 \text{ m}$:



L'équilibre des forces verticales est : $T_y + 10 - 7,5 = 0$

D'où $T_y = -2,5 \text{ kN}$

Au final, $\forall x \in [10 ; 15] \text{ m} ; T_y = -2,5 \text{ kN}$

Tronçon « AD » :

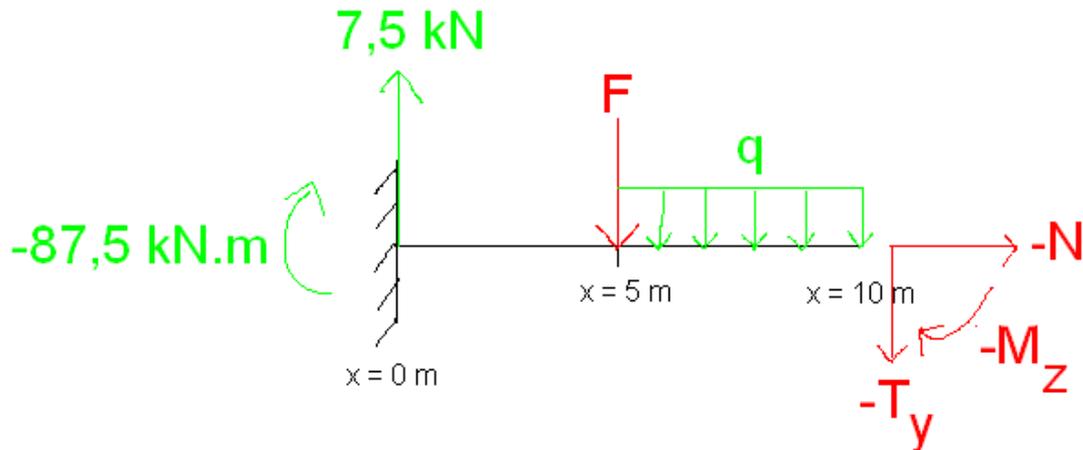
Aucune charge car la courbe de l'effort tranchant est constante.

Coupure à l'abscisse $x = 5 \text{ m}$:

Il y a une charge ponctuelle puisqu'il y a un *saut* d'effort tranchant.

Tronçon « AB » :

Les analyses précédentes sont :



a) L'équilibre des forces verticales est : $-T_y + 5q + F - 7,5 = 0$

Or $T_y = 2,5$ kN d'après l'analyse de la coupure à l'abscisse égale à 15 m.

Donc $5q + F = 5$.

b) Le moment fléchissant en B est nul puisqu'il y a une rotule, cela se traduit par :

$$-5q \times 2,5 - 5F + 10 \times 7,5 - 87,5 = 0$$

$$\text{D'où } 12,5q + 5F = -12,5$$

$$\text{Donc } 2,5q + F = -2,5$$

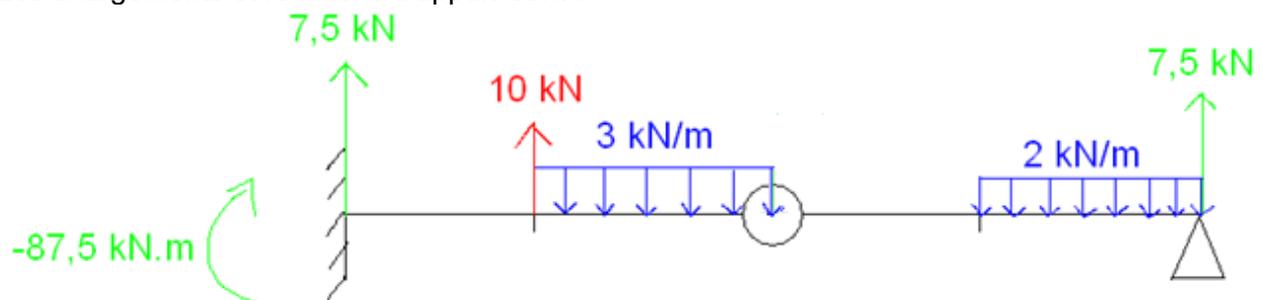
c) Au final, les analyses précédentes aboutissent au système d'équations suivant

$$\begin{cases} 5q + F = 5 \\ 2,5q + F = -2,5 \end{cases}$$

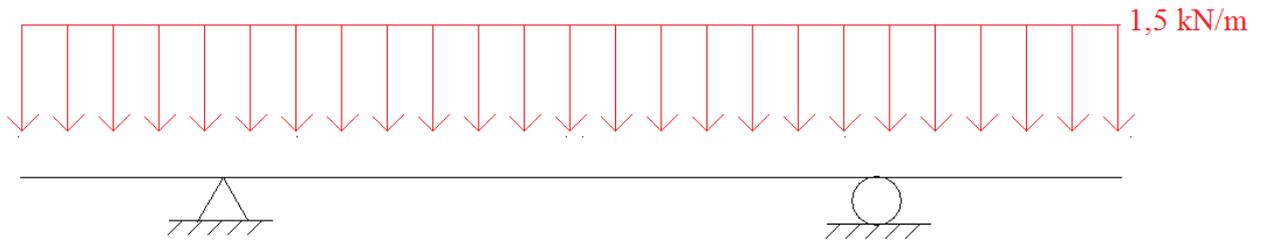
Dont la résolution est $\begin{cases} q = 3 \text{ kN/m} \\ F = -10 \text{ kN} \end{cases}$

Bilan de l'exercice :

Les chargements et réactions d'appuis sont :

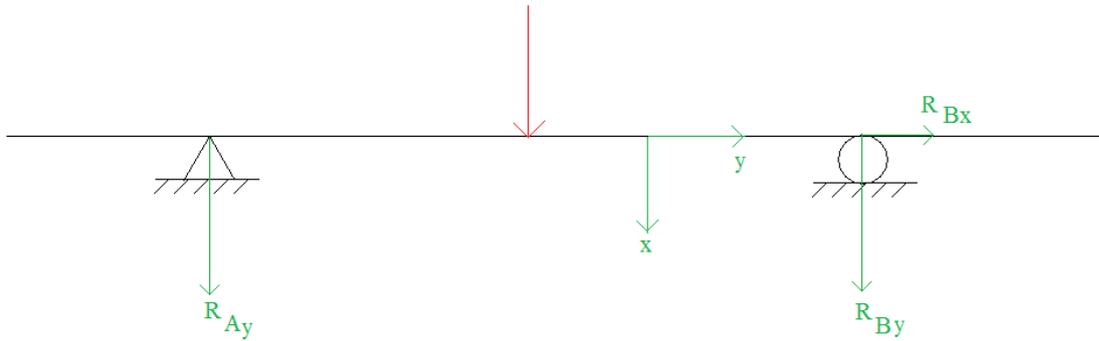


7.2 Réponse exercice [33]



équivalent à

$$1,5 \times 5 = 7,5 \text{ kN}$$



La somme des forces horizontales est nulle, donc $R_{Bx} = 0$.

Par symétrie du chargement et de la géométrie, $R_{Ay} = R_{By} = -3,75 \text{ kN}$

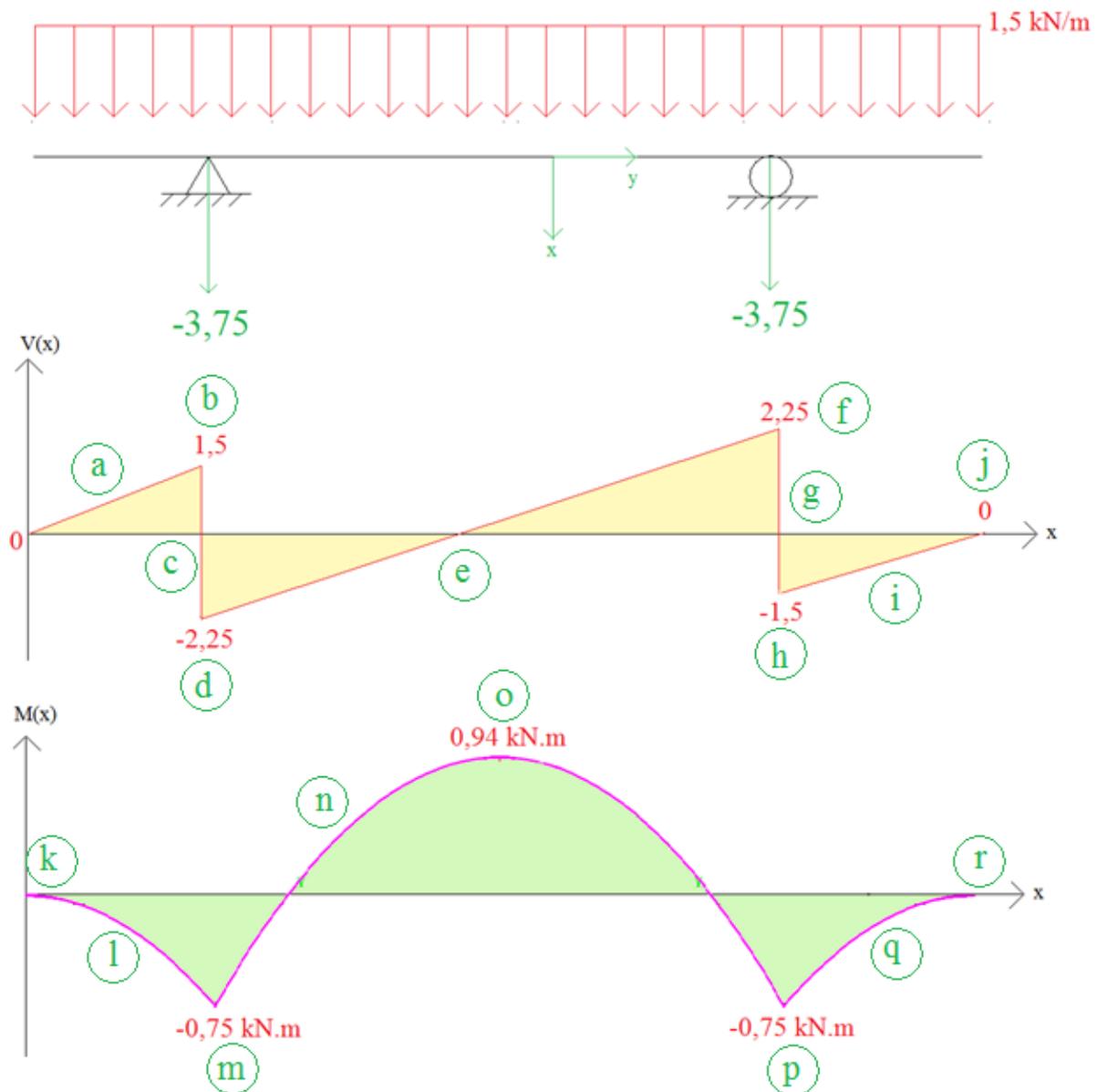


Diagramme effort tranchant :

- La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à $1,5\text{kN/m}$ car il y a une force répartie égale à $1,5\text{ kN/m}$.
- La pente est égale à $1,5\text{ kN/m}$ donc l'effort tranchant pour $x = 1\text{m}$ vaut $0 + 1 \times 1,5 = 1,5\text{ kN}$
- Saut d'effort tranchant égal à la d'appui en en $x = 1\text{ m}$ (c'est-à-dire saut de $-3,75\text{ kN}$), donc effort tranchant égal à $1,5 - 3,75 = -2,25\text{ kN}$.
- La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à $1,5\text{kN/m}$ car il y a une force répartie égale à $1,5\text{ kN/m}$.
- La pente est égale à $1,5\text{ kN/m}$ donc l'effort tranchant pour $x = 4\text{m}$ vaut $-2,25 + 3 \times 1,5 = 2,25\text{ kN}$
- Saut d'effort tranchant égal à la d'appui en en $x = 4\text{ m}$ (c'est-à-dire saut de $-3,75\text{ kN}$), donc effort tranchant égal à $2,25 - 3,75 = -1,5\text{ kN}$
- La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à $1,5\text{kN/m}$ car il y a une force répartie égale à $1,5\text{ kN/m}$.
- La pente est égale à $1,5\text{ kN/m}$ donc l'effort tranchant pour $x = 5\text{m}$ vaut $-1,5 + 1 \times 1,5 = 0\text{ kN}$

Nota : résultat connu mais qui permet de vérifier qu'il n'y ait pas d'erreur dans les calculs précédents.

Diagramme moment fléchissant

- k) Le moment est nul pour $x = 0$ (car extrémité non encastree)
- l) La force est répartie donc le moment a la forme d'une parabole.
- m) On utilise la relation :

$$M_z(x = 1m) = M_z(x = 0m) - \int_0^1 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 0 m) = 0$$

$$\int_0^1 V(x). dx = \frac{1,5}{2} \times 1 = 0,75 \text{ kN.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à -0,75 kN.m

- n) La force est répartie donc le moment a la forme d'une parabole.
- o) On utilise la relation :

$$M_z(x = 2,5 m) = M_z(x = 1 m) - \int_1^{2,5} V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 1 m) = -0,75 \text{ kN.m}$$

$$\int_1^{2,5} V(x). dx = \frac{-2,25}{2} \times 1,5 = -1,69 \text{ kN.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $-0,75 - (-1,69) = 0,94 \text{ kN.m}$

- p) On utilise la relation :

$$M_z(x = 4m) = M_z(x = 2,5m) - \int_{2,5}^4 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 2,5 m) = 0,94 \text{ kN.m}$$

$$\int_{2,5}^4 V(x). dx = \frac{2,25}{2} \times 1,5 = 1,69 \text{ kN.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $0,94 - 1,69 = -0,75 \text{ kN.m}$

- q) La force est répartie donc le moment a la forme d'une parabole.
- r) On utilise la relation :

$$M_z(x = 5m) = M_z(x = 4m) - \int_4^5 V(x). dx$$

Avec :

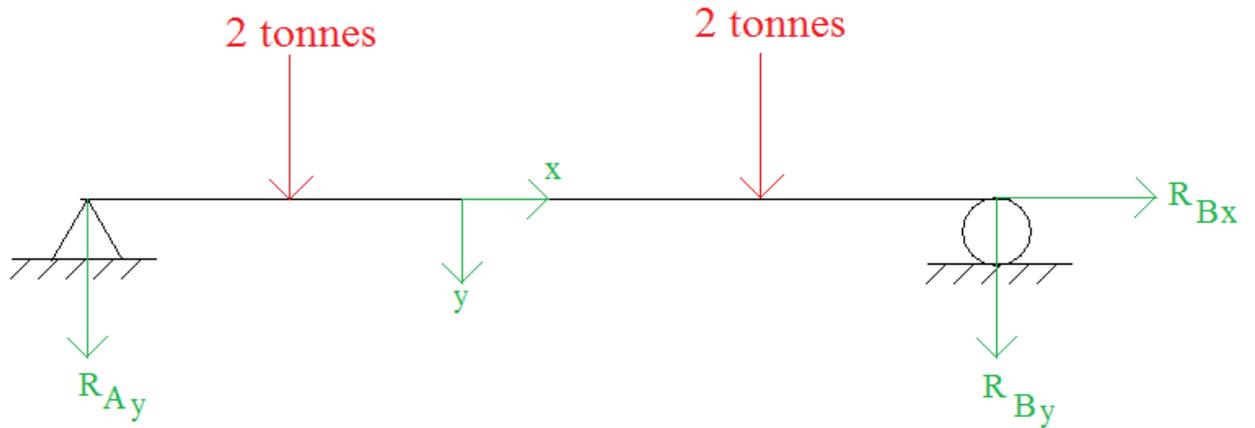
$$M_z(x = 4 m) = -0,75 \text{ kN.m}$$

$$\int_4^5 V(x). dx = \frac{-1,5}{2} \times 1 = -0,75 \text{ kN.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $0,75 - (-0,75) = 0 \text{ kN.m}$

Nota : résultat connu mais qui permet de vérifier qu'il n'y ait pas d'erreur dans les calculs précédents.

7.3 Réponse exercice [34]



La somme des forces horizontales est nulle, donc $R_{Bx} = 0$.

Par symétrie du chargement et de la géométrie, $R_{Ay} = R_{By} = -2$ tonnes

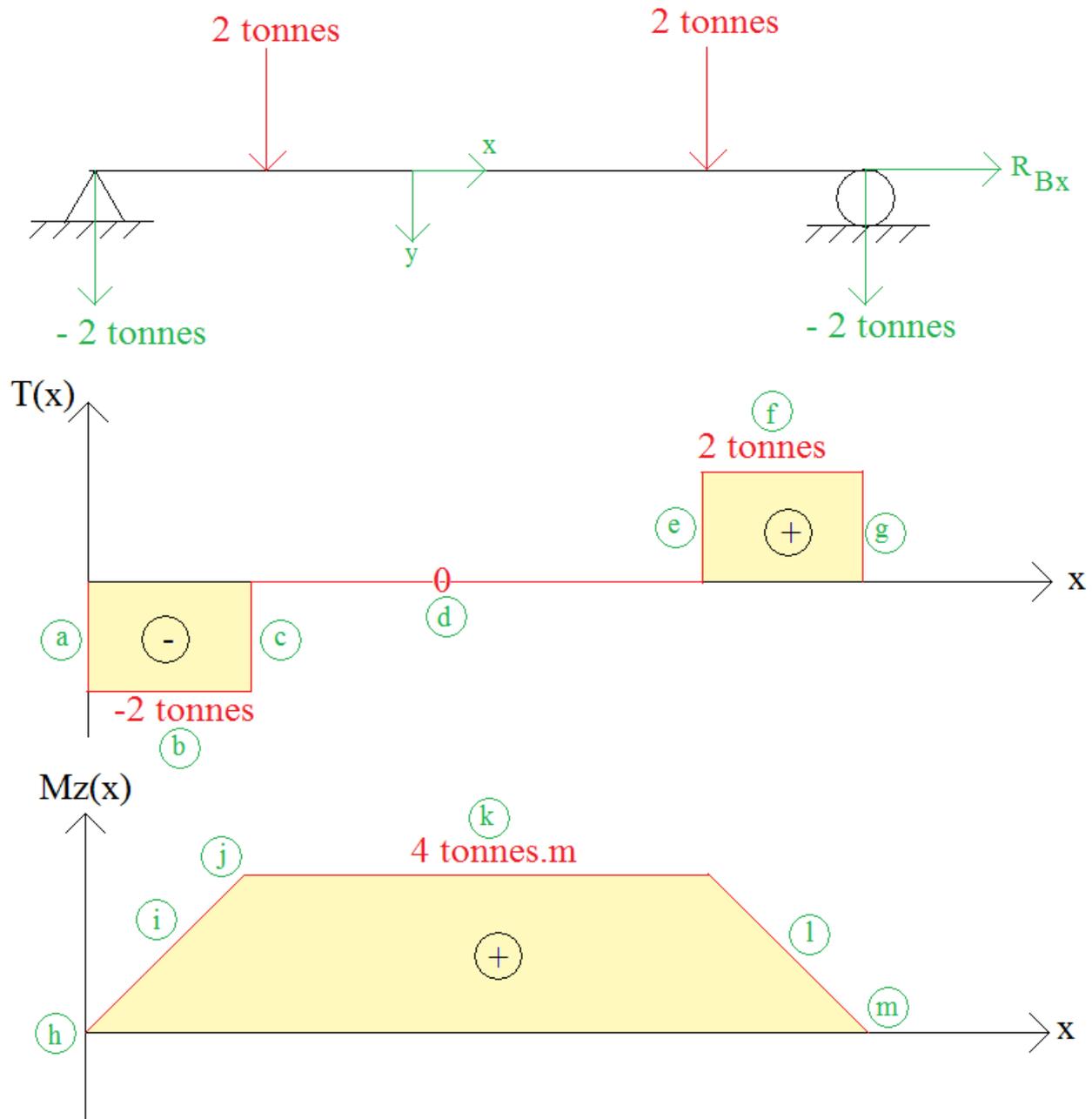


Diagramme effort tranchant :

- Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en en $x = 0$ m (c'est-à-dire saut de -2 tonnes),
- L'effort tranchant est constant car il n'y a pas de charge sur cette portion.
- Saut d'effort tranchant égal à la force ponctuelle en $x = 2$ m (c'est-à-dire saut de 2 tonnes), ainsi la valeur d'effort tranchant vaut : $-2 + 2 = 0$
- L'effort tranchant est constant car il n'y a pas de charge sur cette portion.
- Saut d'effort tranchant égal à la force ponctuelle en $x = 6$ m (c'est-à-dire saut de 2 tonnes), ainsi la valeur d'effort tranchant vaut : $0 + 2 = 2$.
- L'effort tranchant est constant car il n'y a pas de charge sur cette portion.
- Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en en $x = 8$ m (c'est-à-dire saut de -2 tonnes).

Diagramme moment fléchissant

- Le moment est nul pour $x = 0$ (car extrémité non encastree)

- i) La pente de la courbe est égale à 2 tonnes/m (car réaction d'appuis égale à -2 tonnes pour $x = 0$ m)
j) On utilise la relation :

$$M_z(x = 2 \text{ m}) = M_z(x = 0 \text{ m}) - \int_0^2 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 0 \text{ m}) = 0 \text{ tonnes.m}$$

$$\int_0^2 V(x). dx = -2 \times 2 = -4 \text{ tonnes.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $0 - (-4) = 4$ tonnes.m

- k) La pente de la courbe est diminuée de 2 tonnes/m (car force ponctuelle égale à +2 tonnes pour $x = 2$ m), la pente précédente valait 2 tonnes/m, donc la pente de cette portion vaut : $2 - 2 = 0$. Le moment est donc constant sur cette portion et vaut 4 tonnes.m
l) La pente de la courbe est diminuée de 2 tonnes/m (car force ponctuelle égale à +2 tonnes pour $x = 6$ m), la pente précédente valait 0 tonnes/m, donc la pente de cette portion vaut : $0 - 2 = -2$ tonnes/m.
m) On utilise la relation :

$$M_z(x = 8 \text{ m}) = M_z(x = 6 \text{ m}) - \int_6^8 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 6 \text{ m}) = 4 \text{ tonnes.m}$$

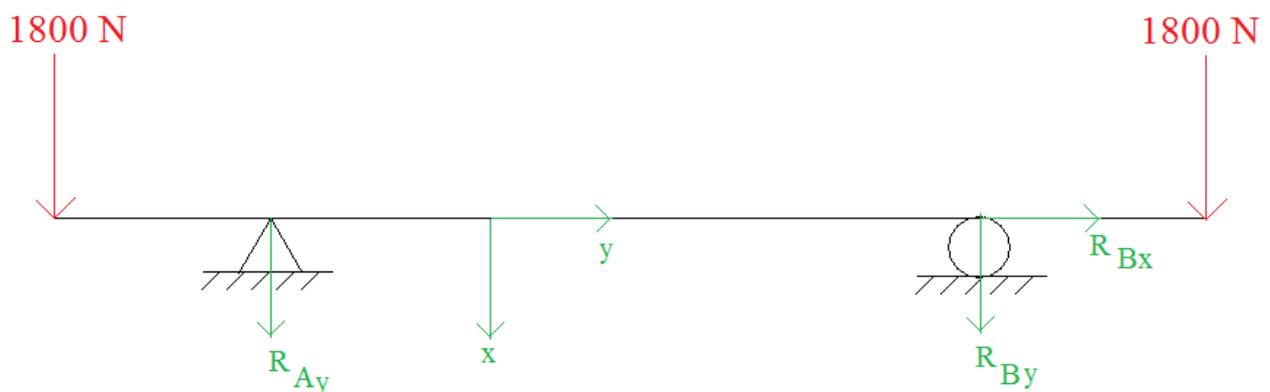
$$\int_6^8 V(x). dx = 2 \times 2 = -4 \text{ tonnes.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $4 - 4 = 0$ tonnes.m

Nota : résultat connu mais qui permet de vérifier qu'il n'y ait pas d'erreur dans les calculs précédents.

7.4 Réponse exercice [35]

Au vu de la simplicité du chargement, il est commode d'utiliser les techniques de tracé direct pour répondre à la question.



Par symétrie du chargement et de la géométrie, on a $R_{Ay} = R_{By} = -1800$ N

La somme des forces horizontales est nulle, donc $R_{Bx} = 0$.

L'effort normal n'est pas dessiné puisqu'il est nul en tout point.

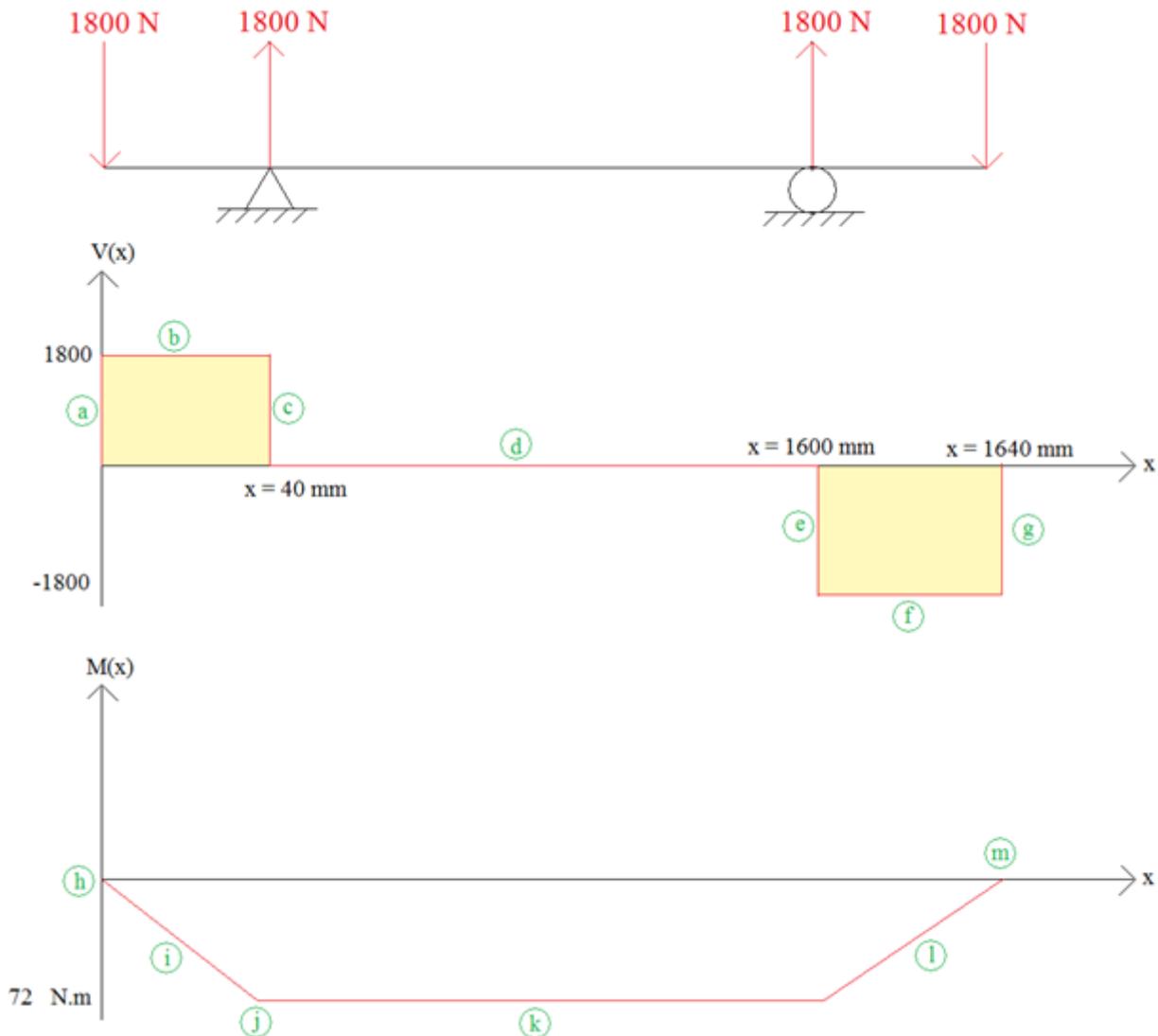


Diagramme effort tranchant :

- a) Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 0$ (c'est-à-dire saut de $+1800$ N), donc effort tranchant égal à 1800 N.
- b) L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- c) Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 40$ mm (c'est-à-dire saut de -1800 N), on revient donc à un effort tranchant nul.
- d) L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- e) Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 1600$ mm (c'est-à-dire saut de -1800 N), donc effort tranchant égal à -1800 N.
- f) L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- g) Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 1640$ (c'est-à-dire saut de $+1800$ N), donc effort tranchant égal à 0 N.

Diagramme moment fléchissant

- h) Moment nul car extrémité non encastrée de la poutre
- i) Changement de pente égale à -1800 N/m car force ponctuelle appliquée en $x = 0$ égale à $+1800$ N.
- j) Changement de pente égale à $+1800$ N/m car réaction d'appui en $x = 40$ mm égale à -1800 N. La pente précédente valait -1800 N/m donc à partir de ce point la pente vaut $-1800+1800 = 0$ N/m.

On utilise la relation :

$$M_z(x = 40 \text{ mm}) = M_z(x = 0 \text{ mm}) - \int_{0 \text{ mm}}^{40 \text{ mm}} V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 0 \text{ mm}) = 0$$

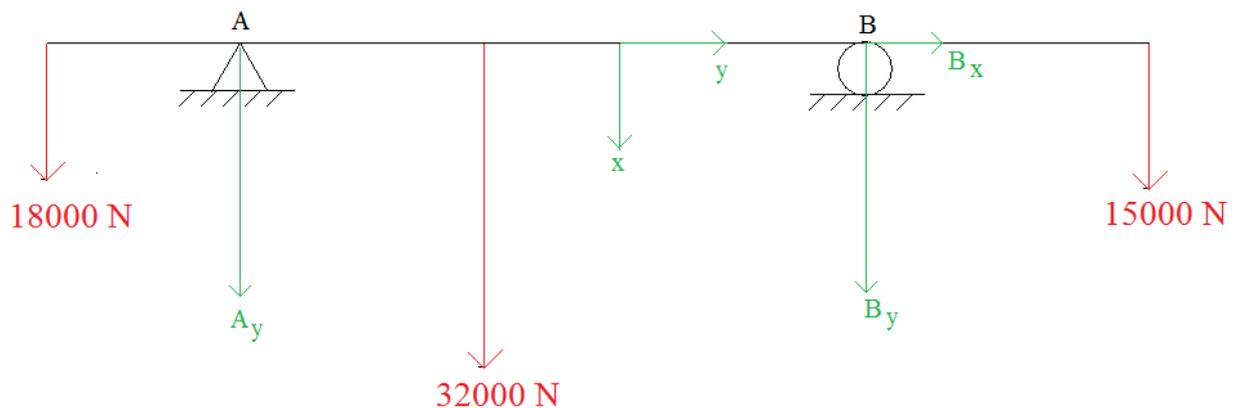
$$\int_{0 \text{ mm}}^{40 \text{ mm}} V(x). dx = \text{Aire jaune} = 1800 \times 40 = 72000 \text{ N.mm} \leftrightarrow 72 \text{ N.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à -720 N.m

- k) Aucun changement de pente car aucun chargement
- l) Changement de pente égale à +1800 N/m car réaction d'appui en $x = 1600 \text{ mm}$ égale à -1800N. La pente précédente valait 0 N/m donc à partir de ce point la pente vaut $0+1800 = 1800\text{N/m}$.
- m) On retrouve bien $M_z = 0$ pour $x = 1640 \text{ mm}$.

7.5 Réponse exercice [36]

Au vu de la simplicité du chargement, il est commode d'utiliser les techniques de tracé direct pour répondre à la question.



La somme des forces horizontales est nulle, donc $B_x = 0$.

Le moment en extrémité de poutre à gauche ($x=0$) est nul, donc :

$$2 \times A_y + (2 + 3) \times 32000 + (2 + 3 + 4) \times B_y + (2 + 3 + 4 + 3) \times 15000 = 0$$

De plus, la somme des forces verticales est nulle, donc

$$18000 + A_y + 32000 + B_y + 15000 = 0$$

Ainsi, des deux équations précédentes, on en déduit que :

$$\begin{cases} A_y = -35000 \text{ N} \\ B_y = -30000 \text{ N} \end{cases}$$

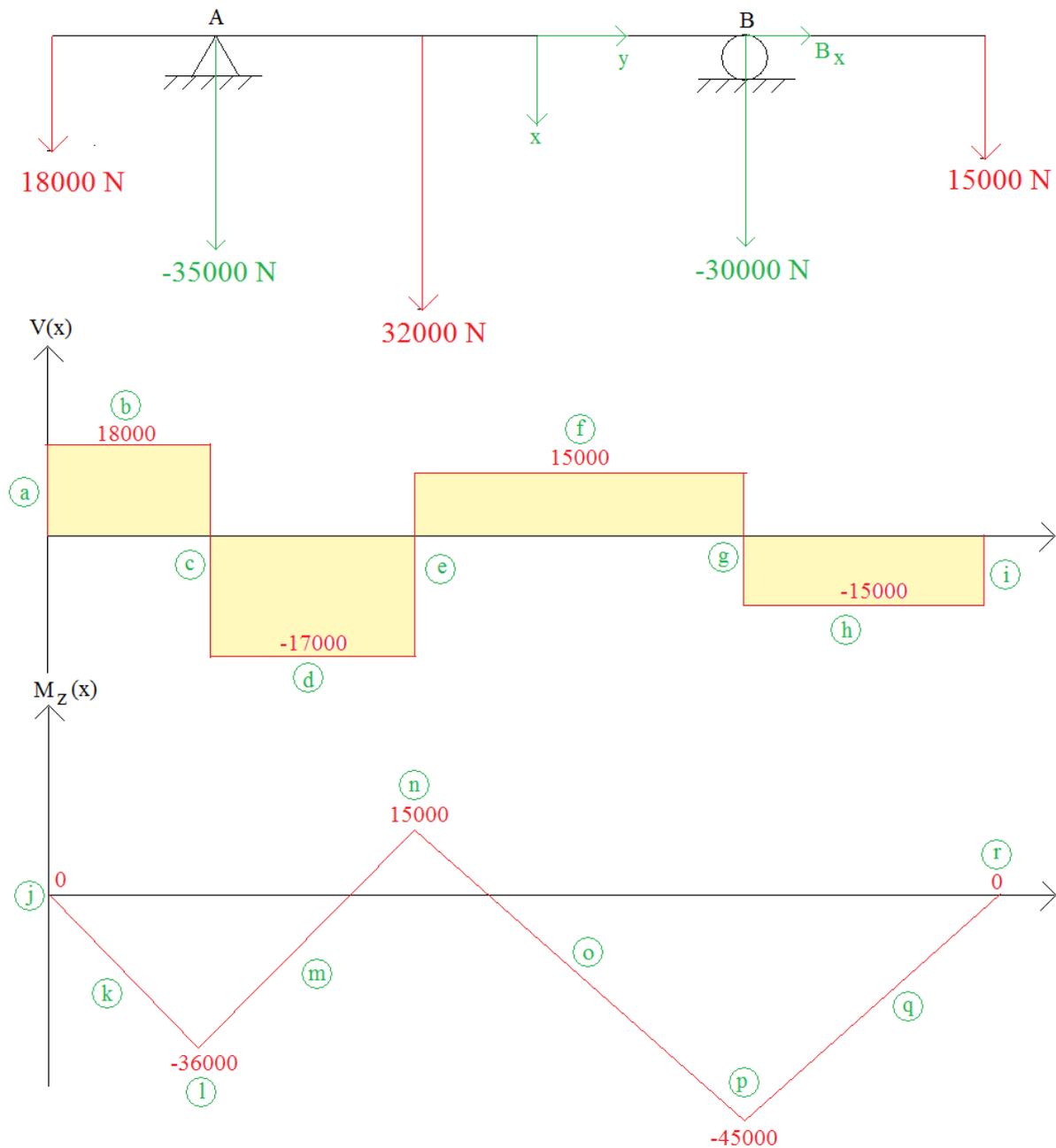


Diagramme effort tranchant :

- Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 0$ (c'est-à-dire saut de +18000 N), donc effort tranchant égal à 18000N.
- L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 2$ m (c'est-à-dire saut de -35000 N), donc effort tranchant égal à $18000 - 35000 = -17000$ N.
- L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 5$ m (c'est-à-dire saut de +32000 N), donc effort tranchant égal à $-17000 + 32000 = 15000$ N.
- L'effort tranchant est constant car aucune charge.
- Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 9$ m (c'est-à-dire saut de -30000 N), donc effort tranchant égal à $15000 - 30000 = -15000$ N.
- L'effort tranchant est constant car aucune charge.

- i) Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 12m$ (c'est-à-dire saut de $+15000$ N), donc effort tranchant égal à $-15000+15000=0N$

Diagramme moment fléchissant

- j) Moment nul car extrémité non encastrée de la poutre
k) Changement de pente égale à -18000 N/m car force ponctuelle appliquée en $x = 0$ égale à $+18000$ N.
l) Changement de pente égale à $+35000$ N/m car réaction d'appui en $x = 2m$ égale à $-35000N$. La pente précédente valait -18000 N/m donc à partir de ce point la pente vaut $-18000+35000 = 17000N/m$.

On utilise la relation :

$$M_z(x = 2m) = M_z(x = 0m) - \int_0^2 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 0 m) = 0$$

$$\int_0^2 V(x). dx = 18000 \times 2 = 36000 N.m$$

Ainsi le moment en ce point est égal à -36000 N.m

- m) Aucun changement de pente car aucun chargement
n) Changement de pente égale à -32000 N/m car force ponctuelle appliquée en $x = 5m$ égale à $+32000$ N.

La pente précédente valait 17000 N/m donc à partir de ce point la pente vaut $17000-32000 = -1500N/m$.

On utilise la relation :

$$M_z(x = 5m) = M_z(x = 2m) - \int_2^5 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 2 m) = -36000$$

$$\int_2^5 V(x). dx = -17000 \times 3 = -51000 N.m$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $-36000+51000 = 15000$ N.m

- o) Aucun changement de pente car aucun chargement
p) Changement de pente égale à 30000 N/m car réaction d'appuis en $x = 9 m$ égale à -30000 N.

La pente précédente valait -15000 N/m donc à partir de ce point la pente vaut $-15000+30000 = 1500N/m$.

On utilise la relation :

$$M_z(x = 9m) = M_z(x = 5m) - \int_5^9 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 5 m) = 15000$$

$$\int_5^9 V(x). dx = 15000 \times 4 = 60000 N.m$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $15000-60000 = -45000$ N.m

- q) Aucun changement de pente car aucun chargement
r) On utilise la relation :

$$M_z(x = 12m) = M_z(x = 9m) - \int_9^{12} V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 9 \text{ m}) = -45000$$

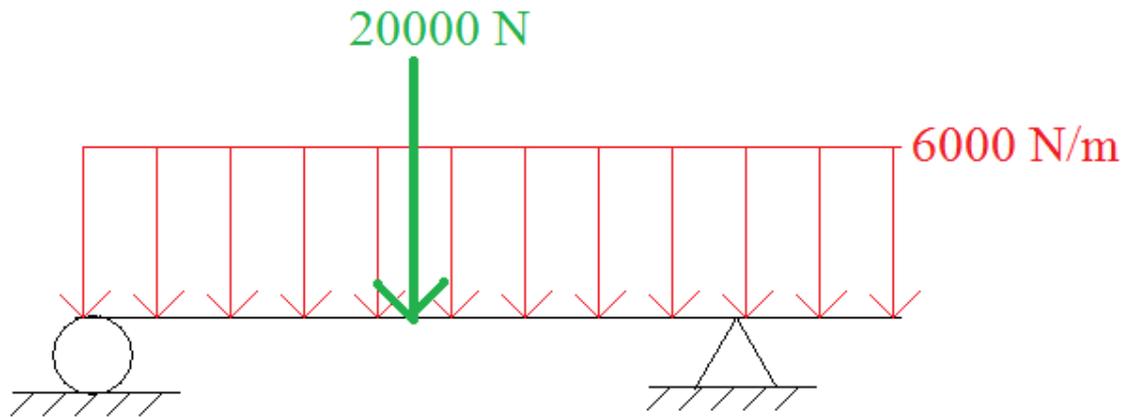
$$\int_9^{12} V(x). dx = -15000 \times 3 = -45000 \text{ N.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $45000 - 45000 = 0 \text{ N.m}$

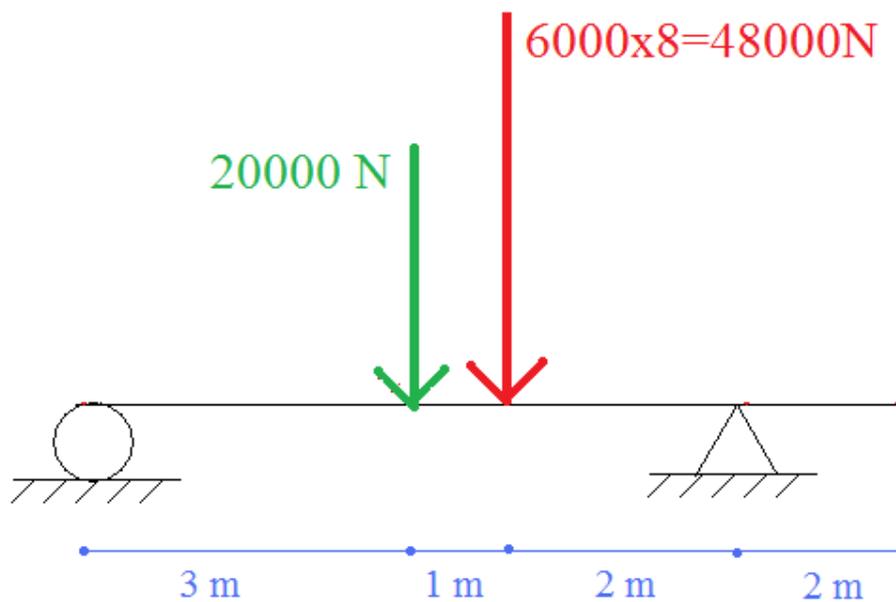
Nota : on connaissait déjà ce résultat puisque on est sur une extrémité libre donc moment nul, mais cela permet de vérifier qu'on « reboucle ».

7.6 Réponse exercice [37]

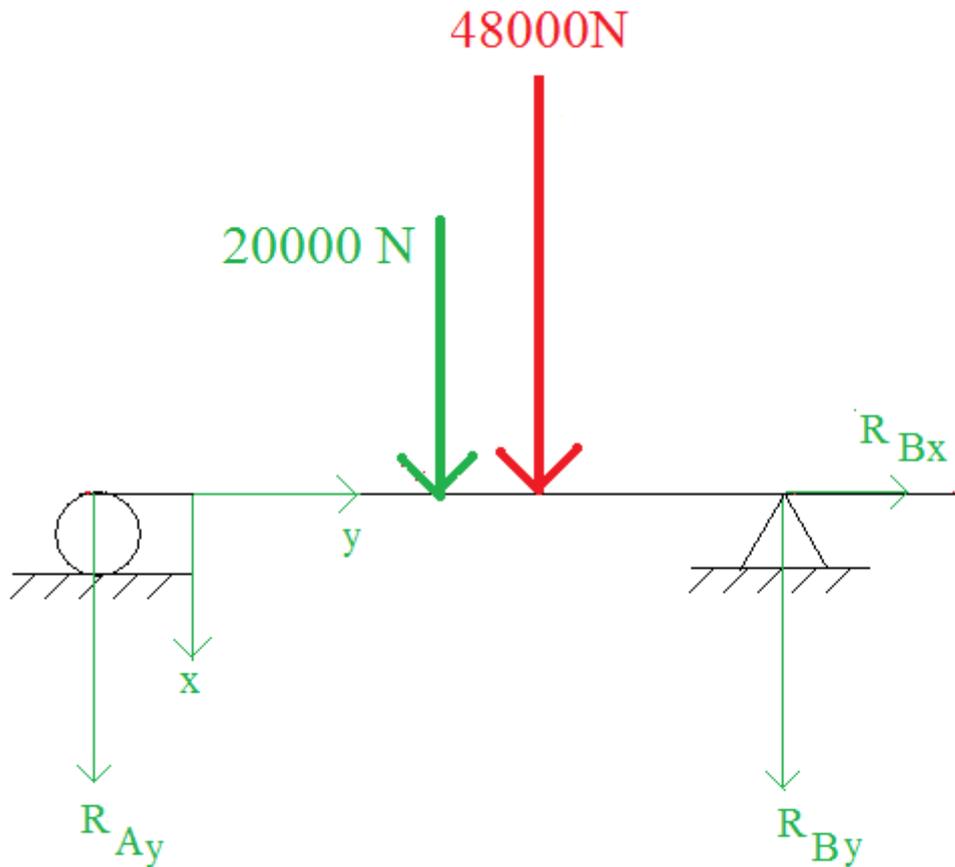
Pour calculer les réactions d'appuis, il convient de trouver les forces globalement équivalentes :



globalement
équivalent à



Puis après mise en place du repère local et des réactions d'appuis :



La somme des forces horizontales est nulle, donc $R_{Bx} = 0$.

Le moment en A ($x=0$) est nul, donc :

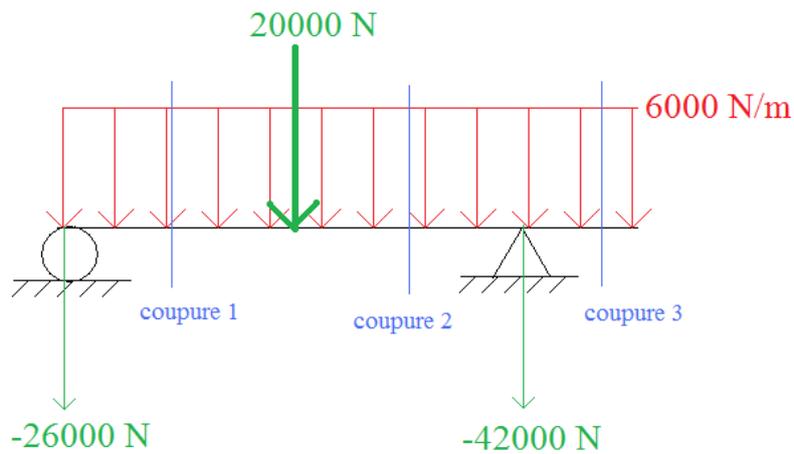
$$3 \times 20000 + 4 \times 48000 + 6 \times R_{By} = 0 \leftrightarrow R_{By} = -42000 \text{ N}$$

De plus, la somme des forces verticales est nulle, donc

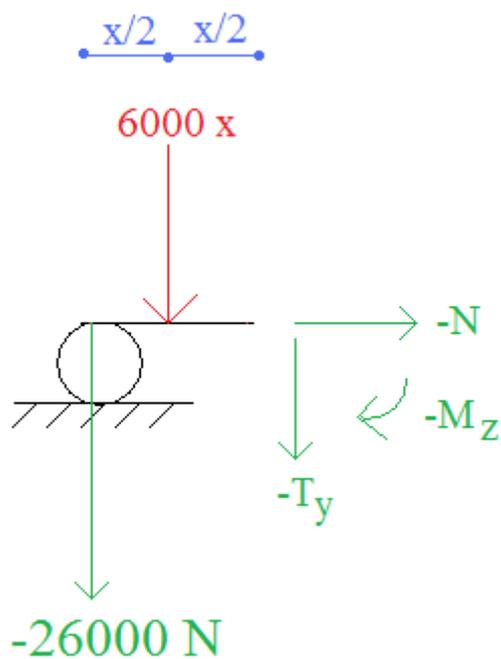
$$R_{Ay} + 20000 + 48000 + R_{By} = 0 \leftrightarrow R_{Ay} = -26000 \text{ N}$$

Comparons les méthodes par tracé direct et par calculs des coupures :

1) Méthode des coupures :



Coupure 1 (x est compris entre 0m et 3m) : conservation de la partie gauche



Effort normal :

$$N = 0$$

Effort tranchant :

$$-T_y + 6000x - 26000 = 0$$

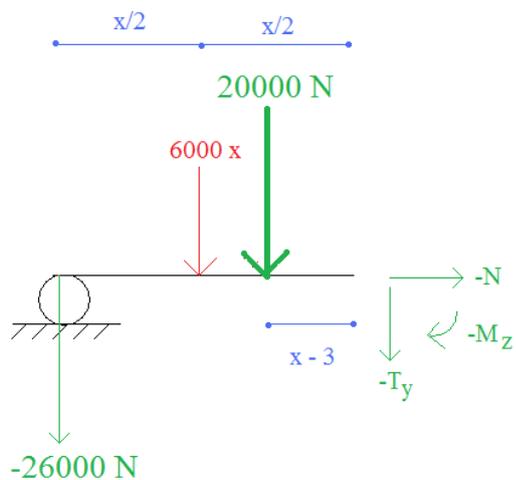
$$T_y = 6000x - 26000$$

Moment fléchissant :

$$-M_z - 6000x \times \frac{x}{2} - (-26000) \times x = 0$$

$$M_z = -\frac{6000x^2}{2} + 26000x$$

Coupure 2 (x est compris entre 3m et 6m) : conservation de la partie gauche



Effort normal :

$$N = 0$$

Effort tranchant :

$$-T_y + 6000x - 26000 + 20000 = 0$$

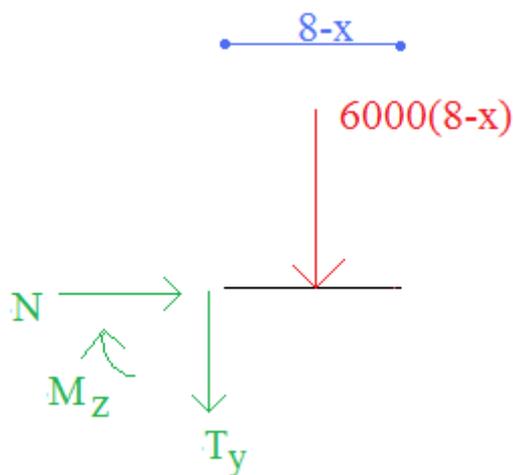
$$T_y = 6000x - 6000$$

Moment fléchissant :

$$-M_z - 6000x \times \frac{x}{2} - (-26000) \cdot x - 20000 \cdot (x - 3) = 0$$

$$M_z = -\frac{6000x^2}{2} + 6000x + 60000$$

Coupure 2 (x est compris entre 6m et 8m) : conservation de la partie droite



Effort normal :

$$N = 0$$

Effort tranchant :

$$T_y + 6000(8 - x) = 0$$

$$T_y = 6000x - 48000$$

Moment fléchissant :

$$M_z + 6000 \times (8 - x) \times \frac{8 - x}{2} = 0$$

$$M_z = -3000x^2 + 48000x - 192000$$

De ces équations se déduisent facilement les diagrammes de sollicitations (non rappelés ici car ils seront dessinés dans la méthode de tracés directs).

2) Méthode de tracés directs :

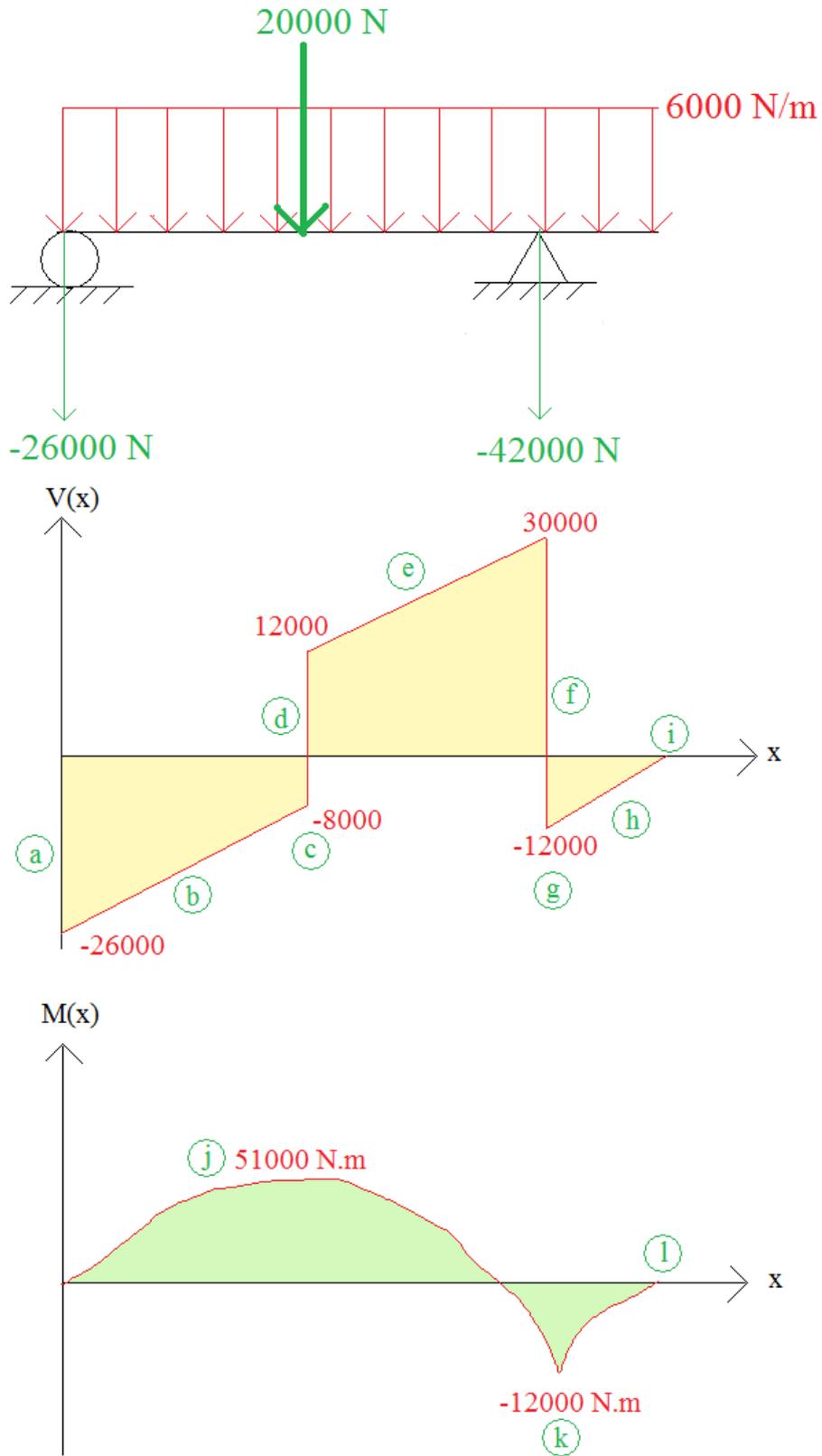


Diagramme effort tranchant :

- a) Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 0$ (c'est-à-dire saut de -26000 N), donc effort tranchant égal à -26000 N.
- b) La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à 6000 N/m car il y a une force répartie égale à 6000 N/m.
- c) La pente est égale à 6000 N/m donc l'effort tranchant pour $x = 3$ m vaut $-26000 + 3 \times 6000 = -8000$ N
- d) Saut d'effort tranchant égal à la force appliquée en $x = 3$ m (c'est-à-dire saut de $+20000$ N), donc effort tranchant égal à $-8000 + 20000 = 12000$ N.
- e) La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à 6000 N/m car il y a une force répartie égale à 6000 N/m donc l'effort tranchant pour $x = 3$ m vaut $12000 + 3 \times 6000 = 30000$ N
- f) Saut d'effort tranchant égal à la réaction d'appui en $x = 6$ m (c'est-à-dire saut de -42000 N),
- g) donc effort tranchant égal à $30000 - 42000 = -12000$ N.
- h) La pente de la courbe d'effort tranchant est égale à 6000 N/m car il y a une force répartie égale à 6000 N/m
- i) donc l'effort tranchant pour $x = 8$ m vaut $-12000 + 2 \times 6000 = 0$ N

Diagramme moment fléchissant

- j) La force est répartie donc le moment a la forme d'une parabole.
Moment nul car extrémité non encastree de la poutre à $x = 0$ (rotule)
On utilise la relation :

$$M_z(x = 3m) = M_z(x = 0m) - \int_0^3 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 0 m) = 0$$

$$\int_0^3 V(x). dx = \frac{-26000 - 8000}{2} \times 3 = -51000 \text{ N.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à 51000 N.m

- k) On utilise la relation :

$$M_z(x = 6m) = M_z(x = 3m) - \int_3^6 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 3 m) = 51000$$

$$\int_3^6 V(x). dx = \frac{12000 + 30000}{2} \times 3 = 63000 \text{ N.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $51000 - 63000 = -12000$ N.m

- l) On utilise la relation :

$$M_z(x = 8m) = M_z(x = 6m) - \int_6^8 V(x). dx$$

Avec :

$$M_z(x = 6 m) = -12000$$

$$\int_6^8 V(x). dx = -\frac{12000}{2} \times 2 = -12000 \text{ N.m}$$

Ainsi le moment en ce point est égal à $-12000 - (-12000) = 0$ N.

- 3) Conclusions :

Pas de meilleure méthode, il faut utiliser celle avec laquelle on est le plus à l'aise. Le mieux étant de vérifier le résultat d'une méthode avec l'autre en cas de doute...

8. Degré d'hyperstaticité - iso/hyperstaticité

8.1 Réponse exercice [38]

a)

Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
1 simple	2	$1 \times 1 = 1$	1	6
1 rotule	2	$1 \times 2 = 2$	2	
1 encastrement	2	$1 \times 3 = 3$	3	

Nombre d'équations :

Il y a 2 barres donc : 2×3 équations soit 6 équations

Degré d'hyperstaticité : $6 - 6 = 0$

b)

Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
1 simple	2	$1 \times 1 = 1$	1	12
1 rotule	3	$2 \times 2 = 4$	4	
2 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	4	
1 encastrement	2	$1 \times 3 = 3$	3	

Nombre d'équations :

Il y a 4 barres donc : 4×3 équations soit 12 équations

Degré d'hyperstaticité : $12 - 12 = 0$

c)

Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
1 simple	2	$1 \times 1 = 1$	1	16
2 rotules	3	$2 \times 2 = 4$	8	
2 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	4	
1 encastrement	2	$1 \times 3 = 3$	3	

Nombre d'équations :

Il y a 5 barres donc : 5×3 équations soit 15 équations

Degré d'hyperstaticité : $16 - 15 = 1$

d)

Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
3 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	6	6

Nombre d'équations :

Il y a 2 barres donc : 2×3 équations soit 6 équations

Degré d'hyperstaticité : $6 - 6 = 0$

e)
Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
3 simples	2	$1 \times 1 = 1$	3	9
3 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	6	

Nombre d'équations :

Il y a 3 barres donc : 3×3 équations soit 9 équations

Degré d'hyperstaticité : $9 - 9 = 0$

f)
Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
3 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	6	6

Nombre d'équations :

Il y a 2 barres donc : 2×3 équations soit 6 équations

Degré d'hyperstaticité : $6 - 6 = 0$

g)
Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
2 rotules	2	$1 \times 2 = 2$	4	7
1 encastrement	2	$1 \times 3 = 3$	3	

Nombre d'équations :

Il y a 2 barres donc : 2×3 équations soit 6 équations

Degré d'hyperstaticité : $7 - 6 = 1$

h)
Nombre d'inconnues

Liaisons	Nombre d'élément autour de la liaison	Inconnues par liaison	Sous total	Total inconnues
1 simple	2	$1 \times 1 = 1$	1	12
1 rotule	2	$1 \times 2 = 2$	2	
3 encastresments	2	$1 \times 3 = 3$	9	

Nombre d'équations :

Il y a 4 barres donc : 4×3 équations soit 12 équations

Degré d'hyperstaticité : $12 - 12 = 0$

La « Réponse exercice [15] » montre qu'il peut y avoir un mécanisme alors que nous avons ici un degré d'hyperstaticité nul. Bien retenir que pour être isostatique, il faut en plus d'un degré d'hyperstaticité nul qu'aucun mouvement ne soit possible !

9. Caractéristiques des sections droites

9.1 Réponse exercice [39]

Remarque préliminaire :

Il est licite de sommer (ou soustraire) des moments d'inertie par rapport au même axe (dans nos cas par rapport au centre de gravité de la section complète)

Mais il n'est pas correct de sommer (ou soustraire) des moments d'inertie si ceux-ci ne sont pas calculés par rapport au même axe. Il convient d'utiliser le théorème de Huygens afin d'obtenir des moments d'inertie par rapport au même point avant de sommer (ou de soustraire).

Autrement écrit :

$$I_{Gz} = \sum_i^n I_{Gz}^{[i]}$$

$$I_{Gz} \neq \sum_i^n I_{Giz}^{[i]}$$

a)

Par définition

$$I_{Gz} = \iint_{\text{Section}} y^2 \cdot dx \cdot dy$$

$$I_{Gz} = \left(\int_{-b/2}^{b/2} dx \right) \times \left(\int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right) = b \times \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = b \times \left(\frac{(h/2)^3}{3} - \frac{(-h/2)^3}{3} \right)$$

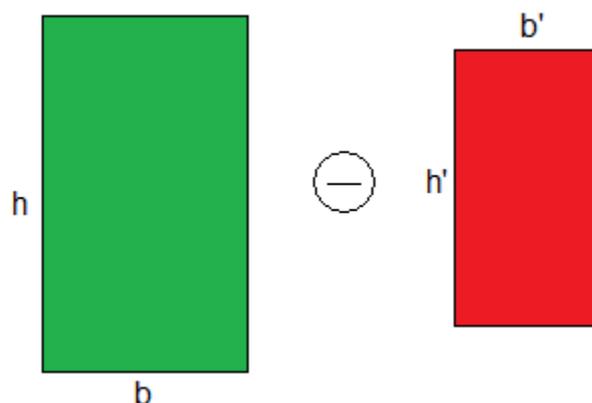
$$\Rightarrow I_{Gz} = \frac{bh^3}{12}$$

Important : ce résultat est **à connaître par cœur** pour gagner du temps !

AN : $I_{Gz} = 0,1008 \text{ m}^4$

b)

La décomposition de la section est :



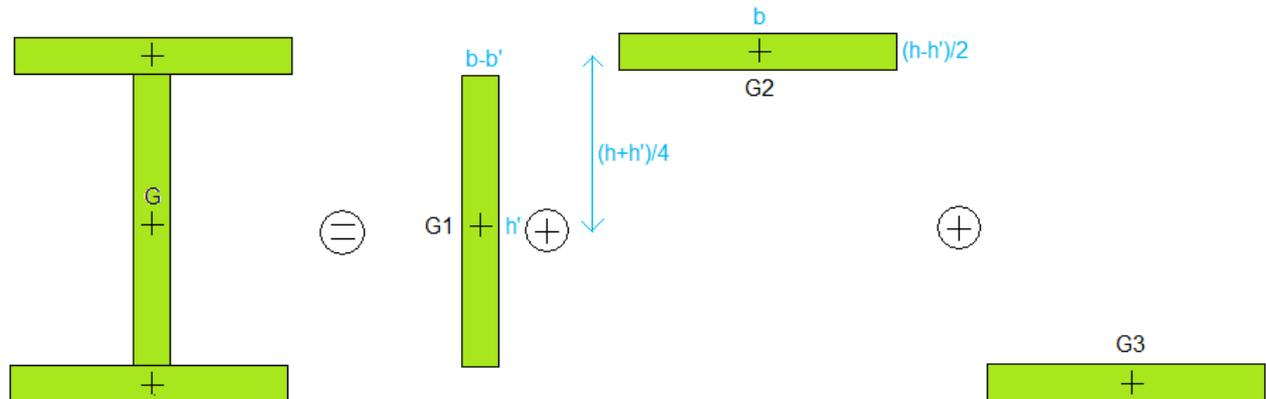
La soustraction directe est licite, puisque les centres de gravité des différents éléments sont confondus.

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{12} - \frac{b'h'^3}{12}$$

AN : $I_{Gz} \approx 0,0826 \text{ m}^4$

c)

La décomposition de la section est :



Ame 1

$$I_{G1z}^{[1]} = I_{Gz}^{[1]} \text{ car } G_1 \equiv G$$

$$\Rightarrow I_{G1z}^{[1]} = \frac{(b - b') \times h^3}{12}$$

Aile 2

$$I_{G2z}^{[2]} = \frac{b \times \left(\frac{h - h'}{2}\right)^3}{12} = \frac{b \times (h - h')^3}{96}$$

$$\overline{GG_2} = \frac{h + h'}{4}$$

$$S_{aile 2} = \frac{b(h - h')}{2}$$

L'application du théorème de Huygens est

$$I_{Gz}^{[2]} = I_{G2z}^{[2]} + \left(\frac{h+h'}{4}\right)^2 \times \frac{b(h-h')}{2} = \frac{b(h-h')^3}{96} + \frac{b(h-h')(h+h')^2}{32}$$

Aile 3

Le calcul est identique à celui de l'aile 2 donc

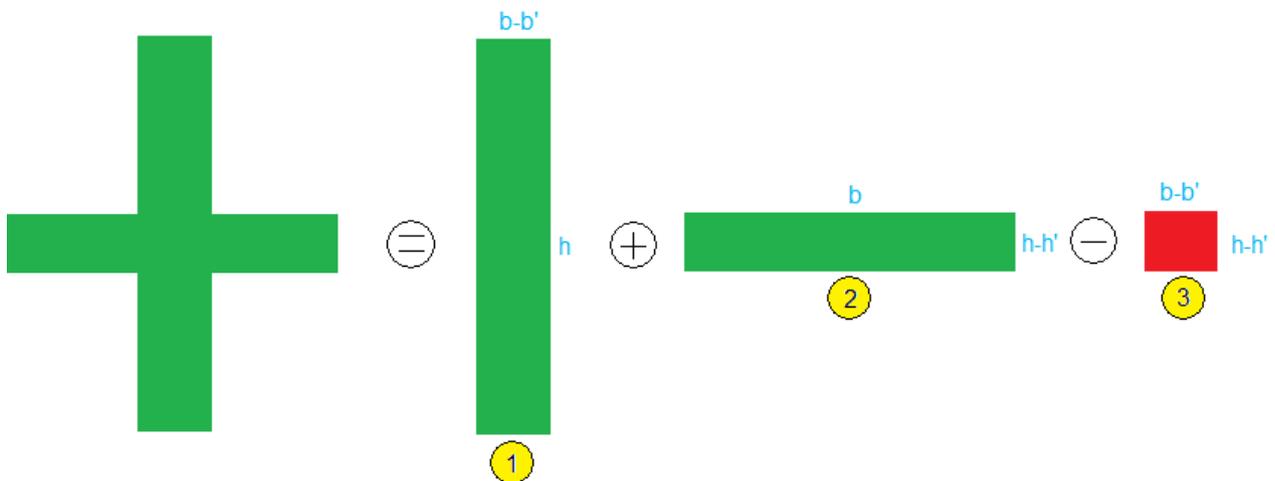
$$I_{Gz}^{[3]} = \frac{b(h - h')^3}{96} + \frac{b(h - h')(h + h')^2}{32}$$

Moment d'inertie totale

$$I_{Gz} = I_{G1z}^{[1]} + I_{G1z}^{[2]} + I_{G1z}^{[3]} = \frac{(b - b')h^3}{12} + \frac{b(h - h')^3}{48} + \frac{b(h - h')(h + h')^2}{16}$$

AN : $I_{Gz} \approx 0,0826 \text{ m}^4$

d)



$G_1 \equiv G_2 \equiv G_3 \equiv G$ donc la somme (et la soustraction) directe des moments d'inertie est licite (sans l'utilisation du théorème de Huygens).

$$I_{Gz}^{[1]} = \frac{(b - b')h^3}{12}$$

$$I_{Gz}^{[2]} = \frac{b(h - h')^3}{12}$$

$$I_{Gz}^{[3]} = \frac{(b - b')(h - h')^3}{12}$$

Au final, le moment d'inertie totale est

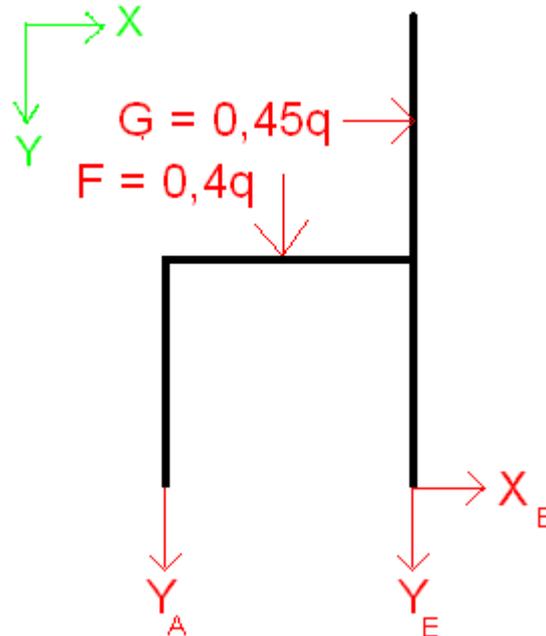
$$I_{Gz} = I_{Gz}^{[1]} + I_{Gz}^{[2]} - I_{Gz}^{[3]} = \frac{(b - b')h^3}{12} + \frac{b(h - h')^3}{12} - \frac{(b - b')(h - h')^3}{12}$$

AN : $I_{Gz} \approx 0,0583 \text{ m}^4$

9.2 Réponse exercice [40]

1) Il n'y a pas basculement de la chaise si la réaction d'appui en A est montante.

La limite de l'équilibre avant basculement est lorsque la réaction d'appui en A est nulle : $Y_A = 0$



L'étude porte sur une demi-chaise, donc : $0,4q = 750 \text{ N}$

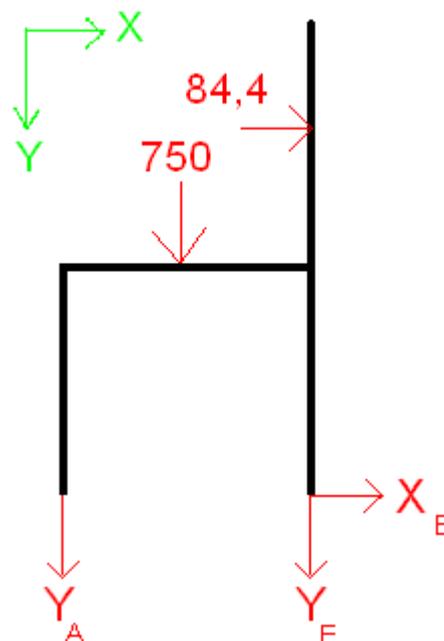
D'où $q = \frac{750}{0,4} = 1875 \text{ kN/m}$

Le moment au point E est nul (puisque'il y a une rotule), donc à la limite de basculement ($Y_A = 0$),

l'équilibre du moment en E est : $0,4 \times q \times 0,2 - 0,45 \times k_{max} \times q \times \left(0,45 + \frac{0,45}{2}\right) = 0$

Au final : $k_{max} = 0,26$

2) En prenant $k = 0,1$, le schéma devient :



Remarque : $k \neq k_{max}$ donc la situation n'est plus la limite d'équilibre ce qui implique que $Y_A \neq 0$. Il convient donc de ne pas oublier la réaction d'appui Y_A dans les différents calculs.

Le moment en E est nul donc $750 \times 0,2 + 0,4 \times Y_A - 84,4 \times \left(0,45 + \frac{0,45}{2}\right) = 0$

D'où la réaction d'appui en A égale à $Y_A = -232,6 \text{ N}$

Remarque : la réaction d'appui Y_A est montante ce qui signifie qu'il n'y a pas basculement de la chaise.

L'équilibre des forces horizontales est : $X_E + 84,4 = 0$

D'où $X_E = -84,4 \text{ N}$

L'équilibre des forces verticales est : $Y_A + Y_E + 750 = 0$

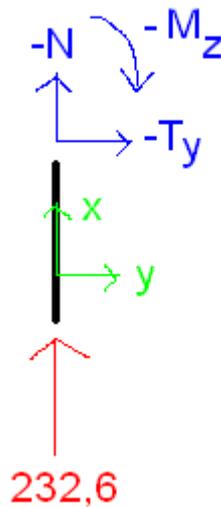
Or $Y_A = -232,6 \text{ N}$ donc $Y_E = -517,4 \text{ N}$

Calcul des sollicitations pour la section « AB »

L'équilibre de forces selon la direction x est : $N = 236,6 \text{ [N]}$

L'équilibre de forces selon la direction y est : $T_y = 0 \text{ [N]}$

L'équilibre du moment fléchissant est : $M_z = 0 \text{ [N.m]}$



Calcul des sollicitations pour la section « CD »

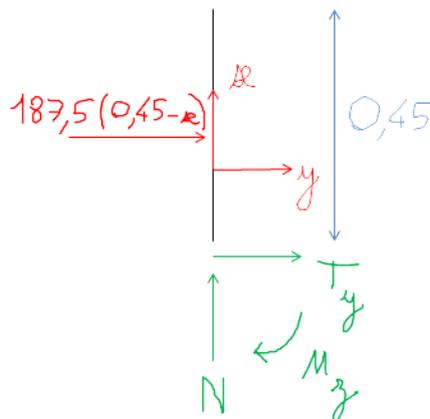
L'équilibre de forces selon la direction x est : $N = 0 \text{ [N]}$

L'équilibre de forces selon la direction y est : $T_y = 187,5 \cdot (x - 0,45) \text{ [N]}$

L'équilibre du moment fléchissant est :

$$M_z = \frac{0,45-x}{2} \times 187,5 \times (x - 0,45)$$

D'où $M_z = 93,8 \times (x - 0,45)^2 \text{ [N.m]}$



Calcul des sollicitations pour la section « BD »

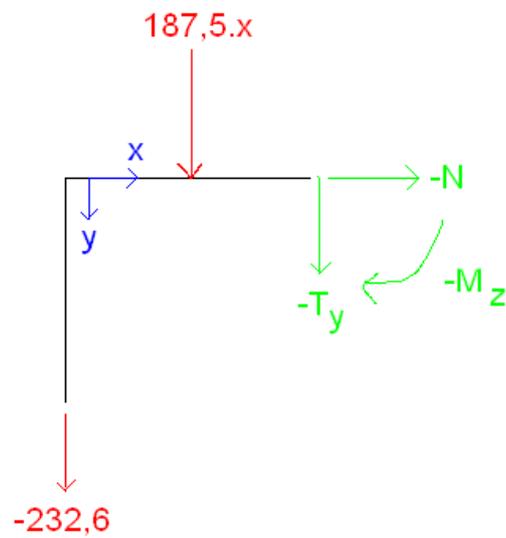
L'équilibre de forces selon la direction x est : $N = 0 \text{ [N]}$

L'équilibre de forces selon la direction y est : $T_y = 1875x - 232,6 \text{ [N]}$

L'équilibre du moment fléchissant est :

$$-M_z - 1875 \times x \times \frac{x}{2} + 232,6 \times x$$

D'où $M_z = 232,6 \times x - 937,5x^2 \text{ [N.m]}$



Calcul des sollicitations pour la section « DE »

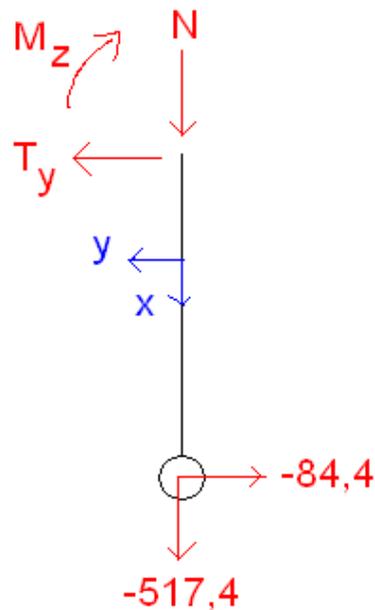
L'équilibre de forces selon la direction x est : $N = 517,4 \text{ [N]}$

L'équilibre de forces selon la direction y est : $T_y = -84,4 \text{ [N]}$

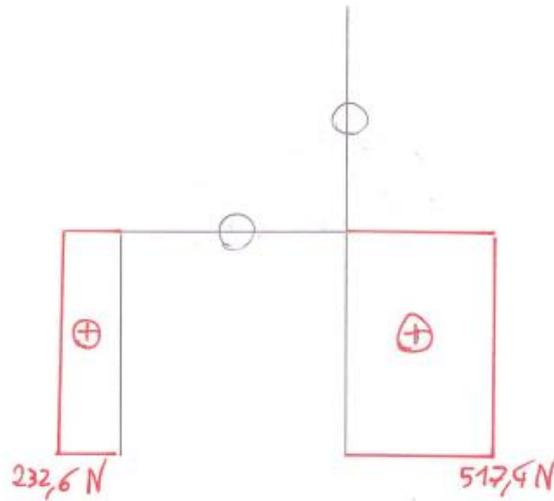
L'équilibre du moment fléchissant est :

$$M_z + 84,4 \times (0,45 - x) = 0$$

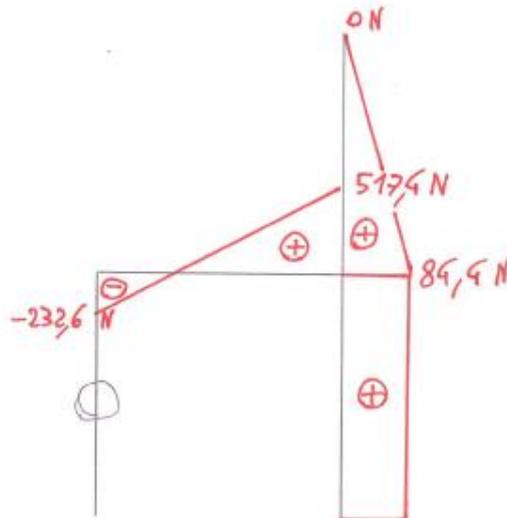
D'où $M_z = 84,4 \times (x - 0,45) \text{ [N.m]}$



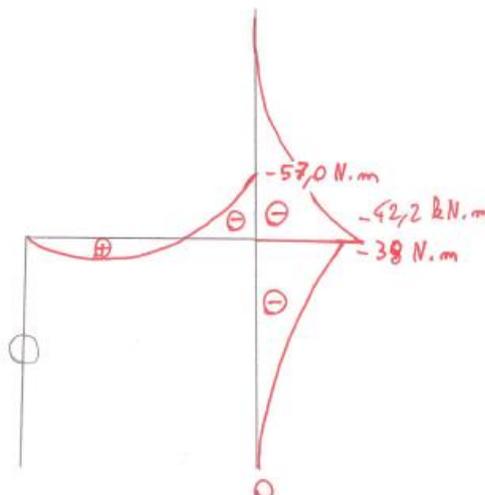
Bilan des diagrammes de sollicitations sur la chaise :
Effort normal N



Effort tranchant T_y



Moment fléchissant M_z



Choix du bois et caractéristiques :

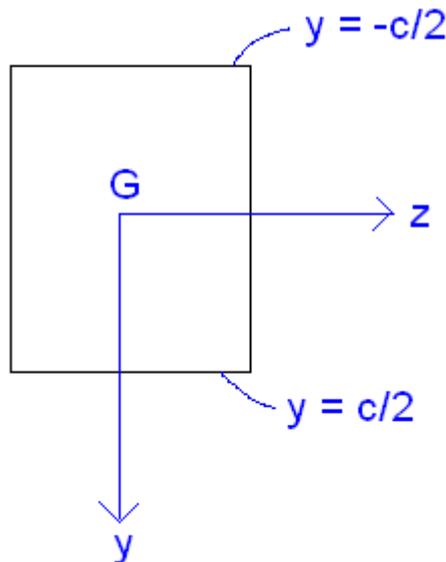
La classe visuelle est A d'après l'énoncé.

- Pour la résistance à la flexion : $f_{m,k} = 22 \text{ MPa}$ (sections concernées : BD, DC et DE)

- Pour la résistance à la compression axiale : $f_{c,0,k} = 20$ MPa (section concernée : AB)
- Pour la résistance à l'effort tranchant : $f_{v,k} = 2,4$ MPa (sections concernées : BD, DC et DE)

Caractéristiques de la section

La section est carrée :



La surface S de la section est c^2 .

L'inertie de la section est, d'après le cours, égale à : $I_z = \frac{c^4}{12}$

Dimensionnement à la compression axiale (section AB) :

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours : $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Or $M_z = 0$; $S = c^2$ et $|N| = 232,6$ N

Au final, la résolution est : $|\sigma_x| = \frac{N}{S} \leq f_{c,0,k}$

D'où $\frac{232,6}{c^2} \leq 20 \cdot 10^6$

Et $c \geq 0,34$ cm

Dimensionnement à la flexion :

Section BD

$N = 0$ et $|M_{z,max}| = 57$ N.m

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours : $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Au final, la résolution est : $|\sigma_x| = \frac{|M_{z,max}|}{I_z} y \leq f_{m,k}$ avec $y = c/2$

D'où $\frac{57 \times 12}{c^4} \times \frac{c}{2} \leq 22 \cdot 10^6$

Et $c \geq 2,5$ cm

Section CD

$N = 0$ et $|M_{z,max}| < 57$ N.m, donc cette portion n'est pas dimensionnante.

Section DE

$N = 517,4$ et $|M_{z,max}| = 38$ N.m.

La contrainte de la section est calculée avec la relation de cours : $\sigma_x = -\frac{N}{S} + \frac{M_z}{I_z} y$

Au final, la résolution est : $|\sigma_x| = \frac{N}{S} + \frac{|M_{z,max}|}{I_z} y \leq f_{m,k}$ avec $y = c/2$

$$D'où \frac{517,4}{c^2} + \frac{38 \times 12}{c^4} \times \frac{c}{2} \leq 22 \cdot 10^6$$

Et $c \geq 2,2 \text{ cm}$

Dimensionnement à l'effort tranchant :

L'effort tranchant maximal est $V_{y,max} = 517,4 \text{ N}$.

Remarque : Le calcul du cisaillement en MPa, utilisé dans la résolution de cet exercice, est un calcul simplifié mais couramment utilisé dans les calculs béton armé. Par la suite du cours, un chapitre consacré à la répartition du cisaillement dans une section proposera une théorie plus proche de la réalité.

La valeur du cisaillement est (théorie simplifiée) : $\frac{V_{y,max}}{c^2}$

Cette valeur doit être inférieure à $f_{v,k}$

$$\text{Donc } \frac{517,4}{c^2} \leq 2,4 \cdot 10^6$$

Et $c \geq 1,5 \text{ cm}$

Bilan de l'exercice

Toute section carrée de côté supérieur à 2,5 cm convient.

9.3 Réponse exercice [41]

Section A

1) Partie 1 :

Centre de gravité : $G_1 \left(\frac{h}{2}, 0 \right)_{Oyz}$

Surface : $A_1 = eh$

Partie 2 :

Centre de gravité : $G_2 \left(0, \frac{h}{6} \right)_{Oyz}$

Surface : $A_2 = eh$

Position du centre de gravité G :

$$G \left(\frac{\frac{h}{2} + 0}{2}, \frac{0 + \frac{h}{6}}{2} \right)_{Oyz} = \left(\frac{h}{4}, \frac{h}{12} \right)_{Oyz}$$

2)

Partie 1 :

$$I_{G1y}^{[1]} = \frac{he^3}{12} \approx 0$$

$$I_{G1z}^{[1]} = \frac{eh^3}{12}$$

$I_{G1yz}^{[1]} = 0$ car G_1 appartient à un axe de symétrie de la partie 1 par définition.

G_1 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_1 \left(\frac{\frac{h}{2} - \frac{h}{4}}{4}, \frac{\frac{h}{6} - \frac{h}{12}}{4} \right)_{Gyz}$

Ainsi par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{[1]} = 0 + eh \times \left(-\frac{h}{12} \right)^2 = \frac{eh^3}{144}$$

$$I_{Gz}^{[1]} = \frac{eh^3}{12} + eh \times \left(\frac{h}{4} \right)^2 = \frac{7eh^3}{48}$$

$$I_{Gyz}^{[1]} = 0 + eh \times \frac{h}{4} \times \left(-\frac{h}{12} \right) = \frac{-eh^3}{48}$$

Partie 2 :

$$I_{G2y}^{[2]} = \frac{eh^3}{12}$$

$$I_{G2z}^{[2]} = \frac{he^3}{12} \approx 0$$

$I_{G2yz}^{[2]} = 0$ car G_2 appartient à un axe de symétrie de la partie 2 par définition.

G_2 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_1 \begin{pmatrix} 0 & -\frac{h}{4} & -\frac{h}{4} \\ \frac{h}{6} & \frac{h}{12} & \frac{h}{12} \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{[2]} = \frac{eh^3}{12} + eh \times \left(\frac{h}{12}\right)^2 = \frac{13eh^3}{144}$$

$$I_{Gz}^{[2]} = 0 + eh \times \left(-\frac{h}{4}\right)^2 = \frac{eh^3}{16}$$

$$I_{Gyz}^{[2]} = 0 + eh \times \left(-\frac{h}{4}\right) \times \left(\frac{h}{12}\right) = \frac{-eh^3}{48}$$

Matrice d'inertie

La section est la somme de la partie 1 et de la partie 2, donc :

$$I_{Gy} = \frac{eh^3}{144} + \frac{13eh^3}{144} = \frac{7eh^3}{72}$$

$$I_{Gz} = \frac{7eh^3}{48} + \frac{eh^3}{16} = \frac{5eh^3}{24}$$

$$I_{Gyz} = -\frac{eh^3}{48} - \frac{eh^3}{48} = -\frac{eh^3}{24}$$

Au final, la matrice d'inerties dans le repère (G,y,z) est : $M = \frac{eh^3}{24} \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 5 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$

3) Calcul des valeurs propres de la matrice d'inertie :

$$\begin{vmatrix} 7-x & -1 \\ -1 & 5-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{3} - x\right)(5 - x) - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{16}{3} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Au final, l'inertie majeure est égale à : $\frac{eh^3}{24} \times \frac{16}{3} = \frac{2eh^3}{9}$

Et l'inertie mineure est égale à : $\frac{eh^3}{24} \times 2 = \frac{eh^3}{12}$

$$\text{D'où } \begin{cases} I_{majeure} = \frac{2eh^3}{9} \\ I_{mineure} = \frac{eh^3}{12} \end{cases}$$

4) Recherche des directions principales :

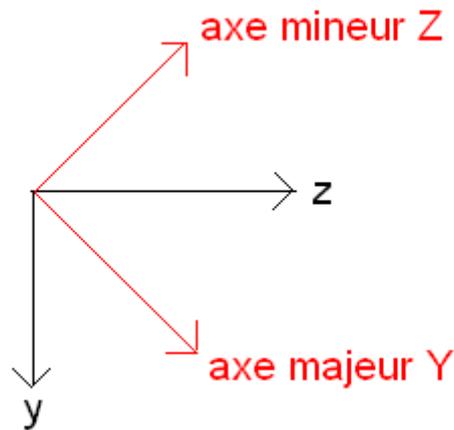
Les relations utilisées sont issues du cours.

Direction principale majeure

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{Gy} - I_{majeure}}{I_{Gyz}} = \frac{\frac{7}{3} - \frac{16}{3}}{-1} \Rightarrow \alpha_1 = 71,6^\circ$$

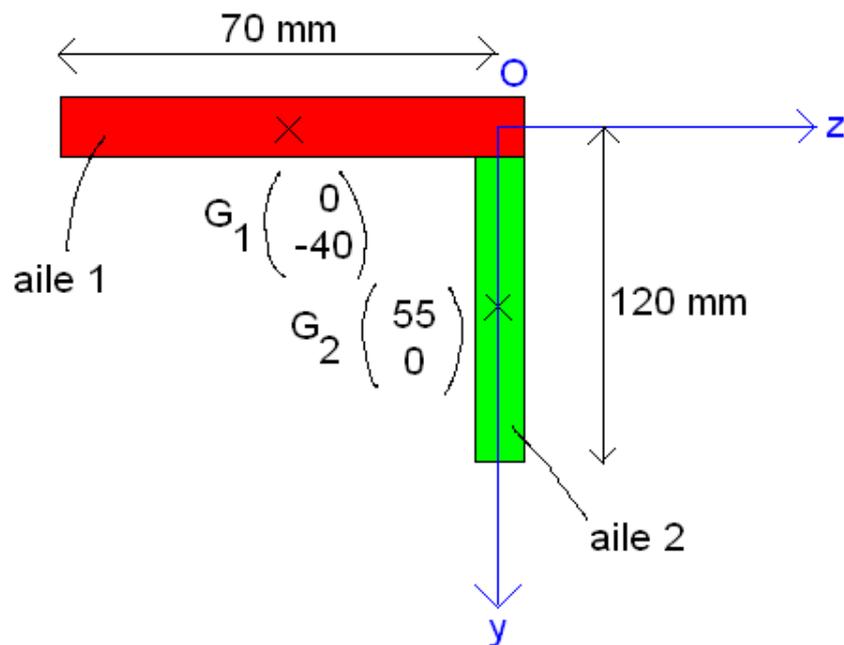
Direction principale mineure

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_{Gy} - I_{mineure}}{I_{Gyz}} = \frac{\frac{7}{3} - 2}{-1} \Rightarrow \alpha_2 = -18,4^\circ$$



Section B

1)



Aile 1 :

Centre de gravité : $G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -40 \end{pmatrix}_{Oyz}$

Surface : $A_1 = 700 \text{ mm}^2$

Aile 2 :

Centre de gravité : $G_2 \begin{pmatrix} 55 \\ 0 \end{pmatrix}_{Oyz}$

Surface : $A_2 = 1200 \text{ mm}^2$

Position du centre de gravité G : $G \begin{pmatrix} \frac{0 \times 700 + 55 \times 1200}{700 + 1200} \\ \frac{-40 \times 700 + 0 \times 1200}{700 + 1200} \end{pmatrix}_{Oyz} = \begin{pmatrix} 34,7 \text{ mm} \\ -14,7 \text{ mm} \end{pmatrix}_{Oyz}$

2)

Aile 1 :

$I_{G1y} = \frac{10 \times 70^3}{12} = 285833 \text{ mm}^4$

$$I_{G1z}^{\boxed{1}} = \frac{70 \times 10^3}{12} = 5833 \text{ mm}^4$$

$$I_{G1yz}^{\boxed{1}} = 0 \text{ car } G_1 \text{ appartient à un axe de symétrie de l'aile 1 par définition.}$$

G_1 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_1 \begin{pmatrix} 0-34,7=-34,7 \text{ mm} \\ -40+14,7=-25,3 \text{ mm} \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{\boxed{1}} = 285833 + 700 \times (-25,3)^2 = 733896 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gz}^{\boxed{1}} = 5833 + 700 \times (-34,7)^2 = 848696 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gyz}^{\boxed{1}} = 0 + 700 \times (-34,7) \times (-25,3) = 614537 \text{ mm}^4$$

Aile 2 :

$$I_{G2y}^{\boxed{2}} = \frac{120 \times 10^3}{12} = 10000 \text{ mm}^4$$

$$I_{G2z}^{\boxed{2}} = \frac{10 \times 120^3}{12} = 1,44 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{G2yz}^{\boxed{2}} = 0 \text{ car } G_2 \text{ appartient à un axe de symétrie de l'aile 2 par définition.}$$

G_2 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_2 \begin{pmatrix} 55-34,7=20,3 \text{ mm} \\ 0+14,7=14,7 \text{ mm} \end{pmatrix}_{Gyz}$

Ainsi par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{\boxed{2}} = 10000 + 1200 \times (14,7)^2 = 269308 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gz}^{\boxed{2}} = 1,44 \cdot 10^6 + 1200 \times (20,3)^2 = 1,93 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gyz}^{\boxed{2}} = 0 + 1200 \times (20,3) \times (14,7) = 358092 \text{ mm}^4$$

Matrice d'inertie

La section est la somme des ailes 1 et 2, donc :

$$I_{Gy} = 733896 + 269308 = 1,00 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gz} = 848696 + 1,93 \cdot 10^6 = 2,78 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_{Gyz} = 614537 + 358092 = 0,93 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

Au final, la matrice d'inerties dans le repère (G,y,z) est : $M = 10^6 \begin{pmatrix} 1 & 0,93 \\ 0,93 & 2,78 \end{pmatrix} [\text{mm}^4]$

3)

Calcul des valeurs propres de la matrice d'inertie :

$$\begin{vmatrix} 1-x & 0,93 \\ 0,93 & 2,78-x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3,18 \\ x_2 = 0,60 \end{cases}$$

Au final, l'inertie majeure est égale à : $3,18 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Et l'inertie mineure est égale à : $6,00 \times 10^5 \text{ mm}^4$

$$\text{D'où } \begin{cases} I_{\text{majeure}} = 3,18 \times 10^6 \text{ mm}^4 = 318 \text{ cm}^4 \\ I_{\text{mineure}} = 6,00 \times 10^5 \text{ mm}^4 = 60 \text{ cm}^4 \end{cases}$$

4) Recherche des directions principales :

Les relations utilisées sont issues du cours.

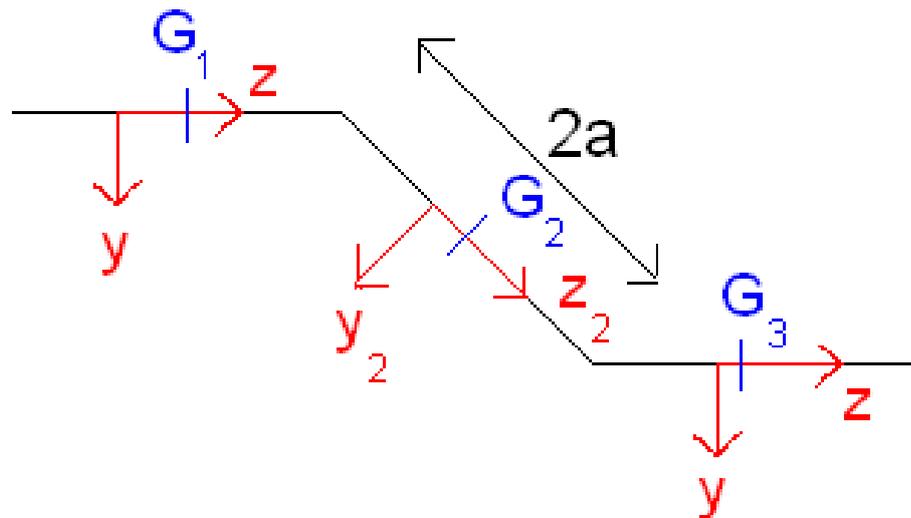
Direction principale majeure

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{Gy} - I_{\text{majeure}}}{I_{Gyz}} = \frac{1 - 3,18}{0,93} \Rightarrow \alpha_1 = -67,5^\circ$$

Direction principale mineure

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_{Gy} - I_{\text{mineure}}}{I_{Gyz}} = \frac{1 - 0,6}{0,93} \Rightarrow \alpha_2 = 23,3^\circ$$

Section C



1)

Aile 1 :

Centre de gravité : $G_1 \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}_{O_{yz}}$

Surface : $A_1 = ea$

Aile 2 :

Centre de gravité : $G_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{O_{yz}}$

Surface : $A_2 = 2ea$

Aile 3 :

Centre de gravité : $G_3 \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}_{O_{yz}}$

Surface : $A_3 = ea$

Position du centre de gravité G :

Par symétrie de la section, il vient que $G \equiv G_2$ d'où $G \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{O_{yz}}$

2)

Aile 1 :

$$I_{G_1y}^{\boxed{1}} = \frac{ea^3}{12}$$

$$I_{G_1z}^{\boxed{1}} = \frac{ae^3}{12} \approx 0$$

$$I_{G_1yz}^{\boxed{1}} = 0 \text{ car } G_1 \text{ appartient à un axe de symétrie de l'aile 1 par définition.}$$

G_1 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_1 \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{2}}{2}a \end{pmatrix}_{G_{yz}}$

Ainsi par application du théorème de Huygens :

$$I_{Gy}^{\boxed{1}} = \frac{ea^3}{12} + ea \times \left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \approx 1,54ea^3$$

$$I_{Gz}^{\boxed{1}} = 0 + ea \times \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0,5ea^3$$

$$I_{Gyz}^{\boxed{1}} = 0 + ea \times \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \times \left(-\frac{1+\sqrt{2}}{2}a\right) \approx 0,85ea^3$$

Aile 2 :

$$I_{G2y}^{[2]} = \frac{e(2a)^3}{12} = \frac{2ea^3}{3}$$

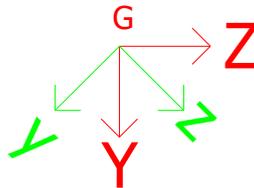
$$I_{G2z}^{[2]} = \frac{2ae^3}{12} \approx 0$$

$I_{G2yz}^{[2]} = 0$ car G_2 appartient à un axe de symétrie de l'aile 2 par définition.

G_2 dans le repère centré en G a pour coordonnées : $G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{Gyz}$

Les inerties doivent être calculées dans le repère global (G,Y,Z). Or les inerties précédentes sont calculées dans le repère local (G,y,z).

Le passage entre le repère local et le repère global est une rotation de $\alpha = 45^\circ$.



La relation qui lie les deux matrices est :

$$\begin{pmatrix} I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{Gy} & -I_{Gyz} \\ -I_{Gyz} & I_{Gz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Or $\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Au final,

$$I_{G2y}^{[2]} = I_{G2z}^{[2]} = I_{G2yz}^{[2]} = \frac{ea^3}{3}$$

Or $G \equiv G_2$, donc $I_{Gy}^{[2]} = I_{Gz}^{[2]} = I_{Gyz}^{[2]} = \frac{ea^3}{3}$

Aile 3 :

Les calculs sont identiques à ceux de l'aile 1, donc :

$$I_{Gy}^{[3]} \approx 1,54ea^3$$

$$I_{Gz}^{[3]} = 0,5ea^3$$

$$I_{Gyz}^{[3]} \approx 0,85ea^3$$

Matrice d'inertie

La section est la somme des ailes 1, 2 et 3 donc :

$$I_{Gy} = 1,54ea^3 + \frac{ea^3}{3} + 1,54ea^3 \approx 3,41ea^3$$

$$I_{Gz} = 0,5ea^3 + \frac{ea^3}{3} + 0,5ea^3 \approx 1,33ea^3$$

$$I_{Gyz} = 0,85ea^3 + \frac{ea^3}{3} + 0,85ea^3 \approx 2,03ea^3$$

Au final, la matrice d'inerties dans le repère (G,y,z) est : $M = ea^3 \begin{pmatrix} 3,41 & 2,03 \\ 2,03 & 1,33 \end{pmatrix}$

3)

Calcul des valeurs propres de la matrice d'inertie :

$$\begin{vmatrix} 3,41 - x & 2,03 \\ 2,03 & 1,33 - x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4,65 \\ x_2 = 0,09 \end{cases}$$

Au final, l'inertie majeure est égale à : $4,65ea^3$

Et l'inertie mineure est égale à : $0,09ea^3$

$$D'où \begin{cases} I_{majeure} = 4,65ea^3 \\ I_{mineure} = 0,09ea^3 \end{cases}$$

4) Recherche des directions principales :
Les relations utilisées sont issues du cours.

Direction principale majeure

$$\tan \alpha_1 = \frac{I_{Gy} - I_{majeure}}{I_{Gyz}} = \frac{3,41 - 4,65}{2,03} \Rightarrow \alpha_1 = -31,4^\circ$$

Direction principale mineure

$$\tan \alpha_2 = \frac{I_{Gy} - I_{mineure}}{I_{Gyz}} = \frac{3,41 - 0,09}{2,03} \Rightarrow \alpha_2 = 58,6^\circ$$

9.4 Réponse exercice [42]

$$A_1 = 400 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 10 \text{ cm}^2$$

La position du centre de gravité G est : $y_G = \frac{10 \times 400 + 16 \times (-10)}{400 - 10} = 9,85 \text{ cm}$

L'inertie du solide 1 par rapport à l'axe z au point G_1 est : $I_{G_1z}^{[1]} = \frac{20^4}{12} \approx 13333 \text{ cm}^4$

L'inertie du solide 1 par rapport à l'axe z au point G est :

$$I_{Gz}^{[1]} = 13333 + 400 \times (10 - 9,85)^2 = 13342 \text{ cm}^4$$

L'inertie du solide 2 par rapport à l'axe z au point G_2 est : $I_{G_2z}^{[2]} = \frac{5 \times 2^3}{12} \approx 3,33 \text{ cm}^4$

L'inertie du solide 2 par rapport à l'axe z au point G est :

$$I_{Gz}^{[2]} = 3,33 + 10 \times (16 - 9,85)^2 = 382 \text{ cm}^4$$

Au final, l'inertie totale par rapport à l'axe z au point G est :

$$I_{Gz} = I_{Gz}^{[1]} - I_{Gz}^{[2]} = 12960 \text{ cm}^4$$

Comme $v = 9,85 \text{ cm}$, il vient :

$$\frac{I_{Gz}}{v} = \frac{12960}{9,85} \approx 1316 \text{ cm}^3$$

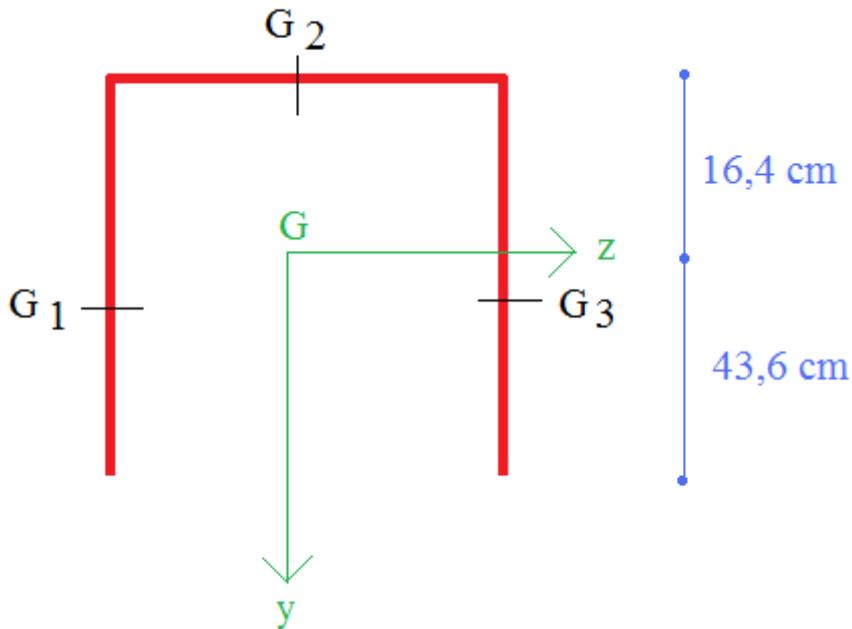
9.5 Réponse exercice [43]

Section 1

$$a) \overline{OG} = \frac{eb \times 0 + 2 \times ea \times \frac{a}{2}}{e \times (2a + b)} = \frac{a^2}{2a + b} = 16,4 \text{ cm}$$

$$b) A_1 = e \times (2a + b) + 440 \text{ cm}^2$$

c)



$$I_{GZ}^{[1]} = \frac{ea^3}{12} + ea \times (\overrightarrow{GG_1} \cdot \vec{y})^2 = \frac{2 \times 60^3}{12} + 2 \times 60 \times (43,6 - 30)^2 = 58195 \text{ cm}^4$$

$$I_{GZ}^{[2]} = \frac{be^3}{12} + eb \times (\overrightarrow{GG_2} \cdot \vec{y})^2 = \text{négligeable} + 2 \times 100 \times 16,4^2 = 53792 \text{ cm}^4$$

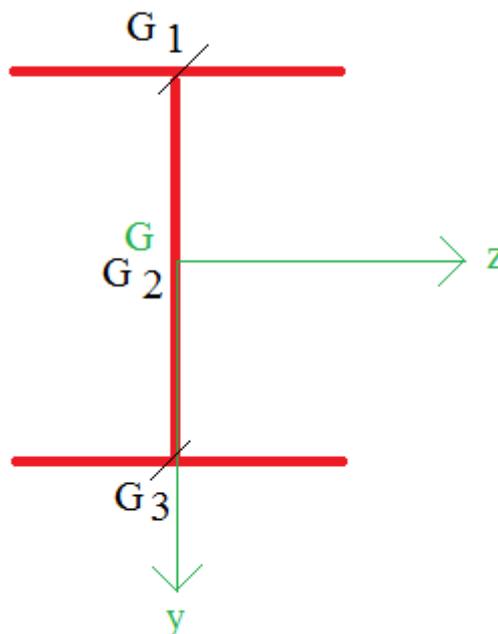
$$I_{GZ}^{[3]} = I_{GZ}^{[1]} = 58195 \text{ cm}^4$$

$$I_{Gz} = I_{GZ}^{[1]} + I_{GZ}^{[2]} + I_{GZ}^{[3]} = 170182 \text{ cm}^4$$

Section 2

a) $A_2 = e \times (2a + b) + 440 \text{ cm}^2$

b)



$$I_{GZ}^{[1]} = \frac{ae^3}{12} + ea \times (\overrightarrow{GG_1} \cdot \vec{y})^2 = \text{négligeable} + 2 \times 60 \times 50^2 = 300000 \text{ cm}^4$$

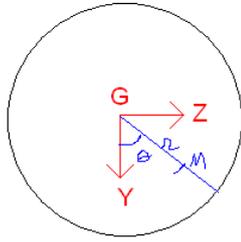
$$I_{GZ}^{[2]} = \frac{eb^3}{12} = \frac{2 \times 100^3}{12} = 166667 \text{ cm}^4$$

$$I_{GZ}^{[3]} = I_{GZ}^{[1]} = 300000 \text{ cm}^4$$

$$I_{Gz} = I_{GZ}^{[1]} + I_{GZ}^{[2]} + I_{GZ}^{[3]} = 776667 \text{ cm}^4$$

9.6 Réponse exercice [44]

Méthode 1



$$\begin{cases} y_M = r \cos \theta \\ dS = r dr d\theta \end{cases}$$

$$\cos^2 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2i\theta} + 2 + e^{-2i\theta}}{4} = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

$$I_z = \iint y^2 dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos^2 \theta \times r dr d\theta = \frac{1}{2} \int_0^R r^3 \int_0^{2\pi} [\cos(2\theta) + 1] d\theta dr$$

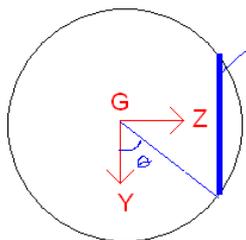
$$= \frac{1}{2} \int_0^R r^3 \left[\frac{\sin(2\theta)}{2} + \theta \right]_0^{2\pi} dr$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^R r^3 \times 2\pi dr = \pi \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^R$$

et Au final

$$I_{Gz} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Méthode 2



$$dS \begin{cases} \text{hauteur } 2y \text{ avec } y = R \cos \theta \\ \text{longueur } dz \text{ avec } z = R \sin \theta \text{ donc } dz = R \cos \theta d\theta \end{cases}$$

$$dI_z = \frac{dz \times (2y)^3}{12} = \frac{r \cos \theta \times (2r \cos \theta)^3 d\theta}{12} = \frac{2r^4 \cos^4 \theta d\theta}{3}$$

$$\cos^4 \theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^4 = \frac{\cos(4\theta)}{16} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned}
 I_z &= \int dI_z = \frac{2R^4}{3} \int_0^\pi \cos^4 \theta \, d\theta = \frac{2R^4}{3} \int_0^\pi \left(\frac{\cos(4\theta)}{16} + \frac{\cos(2\theta)}{2} + \frac{3}{8} \right) d\theta \\
 &= \frac{2R^4}{3} \left[\frac{\sin(4\theta)}{64} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{3\theta}{8} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{2R^4}{3} \times \frac{3\pi}{8}
 \end{aligned}$$

D'où $I_z = \frac{\pi R^4}{4}$

9.7 Réponse exercice [45]

Aire = 4000 mm²

$I_y = 1168440 \text{ mm}^4$

$I_z = 8265100 \text{ mm}^4$

$I_{\text{majeur}} = 9433530 \text{ mm}^4$

Angle de la direction principale par rapport à l'horizontale = 72,7 °

9.8 Réponse exercice [46]

Aire = 1587 mm²

$I_y = 321971 \text{ mm}^4$

$I_z = 2629050 \text{ mm}^4$

$I_{\text{majeur}} = 2951020 \text{ mm}^4$

Angle de la direction principale par rapport à l'horizontale = 28,4 °

9.9 Réponse exercice [47]

Aire = 354 mm²

$I_y = 5764 \text{ mm}^4$

$I_z = 22892 \text{ mm}^4$

$I_{\text{majeur}} = 28656 \text{ mm}^4$

Angle de la direction principale par rapport à l'horizontale = 3.4 °

9.10 Réponse exercice [48]

$I_{Gz} \approx 0,1098 \times R^4$

$$I_{Oz} = \frac{\pi R^4}{8}$$

9.11 Réponse exercice [49]

$$I_{Gz} = \frac{bh^3}{36}$$

$$I_{Oz} = \frac{bh^3}{12}$$

9.12 Réponse exercice [50]

$$I_z = 0,0357 \text{ m}^4$$